

DIFERENCIABILIDAD Y APLICACIONES

allave @ madrid.uned.es

①

CAMPOS ESCALARES

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

(2)

Consideraremos funciones que a un vector le asigna un número real

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Por ejemplo

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

Imaginemos que a un punto del espacio le asignamos una temperatura, un potencial,

Para los campos escalares consideramos superficies de nivel

$$f(x, y, z) = c \text{ (constante)}$$

Ejemplo 1 Si $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

Las superficies de nivel $f(x, y, z) = c$

$$x^2 + y^2 + z^2 = c$$

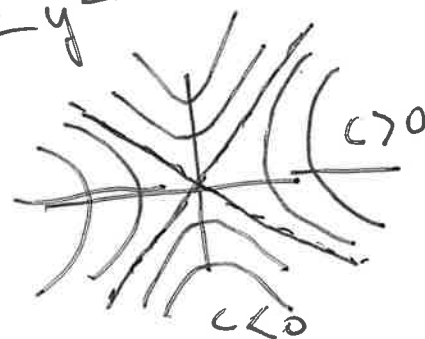
Son esferas de radio $= \sqrt{c}$



Ejemplo 2 Si $f(x, y) = x^2 - y^2$

las curvas de nivel $x^2 - y^2 = c$

son hipérbolas



Ejemplo 3 Las funciones

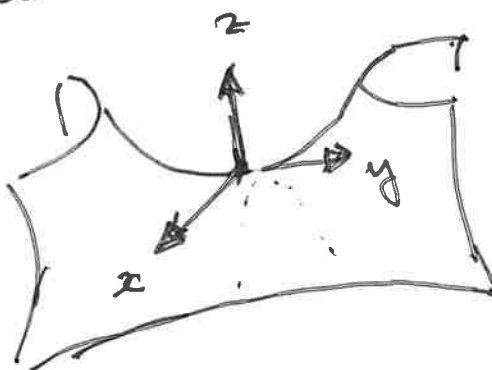
(3)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

se pueden representar como una superficie

$$z = f(x, y) \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

Por ejemplo
representar $z = x^2 - y^2$



se puede

Interpretación

cortes a $z = cte$

$$x^2 - y^2 = c$$

(hipérbolas)

cortes a $x = cte$

$$z = c^2 - y^2$$

(parábolas)

cortes $y = cte$

$$z = x^2 - c^2$$

(parábolas)

Derivada direccional

La derivada de f en la dirección
de $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=1$) en el punto $\vec{x}_0$

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h}$$

(Mide la velocidad de variación de f en
la dirección $\vec{v}$)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_{\vec{i}} f ; \frac{\partial f}{\partial y} = D_{\vec{j}} f ; \frac{\partial f}{\partial z} = D_{\vec{k}} f$$

Derivadas parciales son derivadas direccionales
en las direcciones de los ejes coordenados

Gradiente de f

(4)

$$\nabla f = \text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

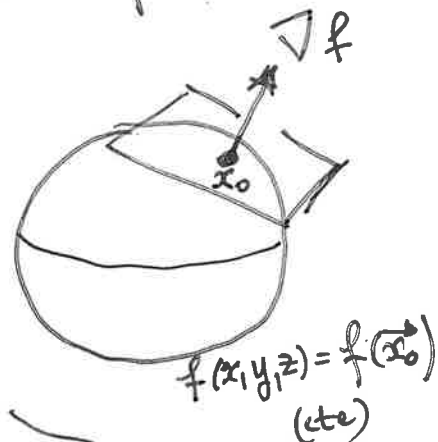
Ejemplo

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{distancia al origen})$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \end{aligned}$$

Significado geométrico del gradiente

- 1) ∇f es perpendicular a la superficie de nivel y está dirigido en la dirección del crecimiento. Es el vector normal al plano tangente de la superficie de nivel.



- 2) El módulo del gradiente $|\nabla f|$ es igual al valor máximo de las derivadas direccionales en el punto.

3) Derivada direccional

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \vec{v} \cdot \nabla f(\vec{x}_0)$$

4) Si el campo escalar es diferenciable, la diferencial es la aplicación lineal que tiene por matriz al gradiente

Ejemplo Si $f(x, y, z) = x^2 e^{-yz}$
 y $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ [$|\vec{v}| = 1$]

$$\nabla f(x, y, z) = (2x e^{-yz}, -x^2 z e^{-yz}, -x^2 y e^{-yz})$$

La derivada direccional en el punto $(1, 0, 0)$ en la dirección $\vec{v}$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(1, 0, 0) &= \nabla f(1, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \\ &= (2, 0, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

5) En un mapa de curvas de nivel el gradiente señala la dirección en la cual más se puntan las curvas de nivel, dirección de máximo crecimiento



6
Ejemplo Calcula la ecuación del plano tangente a la superficie

$$3xy + z^2 = 4$$

en el punto $(1, 1, 1)$

Respuesta:

Si consideramos el campo escalar

$$f(x, y, z) = 3xy + z^2$$

la superficie dada es una superficie de nivel

$$\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$$

$$\nabla f(1, 1, 1) = (3, 3, 2)$$

La ecuación del plano tangente es el plano que pasa por $(1, 1, 1)$ con vector normal $(3, 3, 2)$

$$3(x-1) + 3(y-1) + 2(z-1) = 0$$

$$3x + 3y + 2z = 8$$

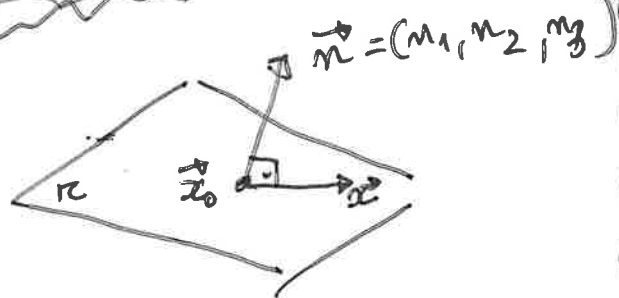
Recordatorio

Los puntos $\vec{x}$ del plano π verifican que

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \perp \vec{n} \Rightarrow (\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

Ecuación de un plano de $\mathbb{R}^3$



Teorema de Taylor

(7)

Recordatorio: Para funciones de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} (x-x_0)^{m+1}$$

Donde

$$\xi \in (x_0, x)$$

↑ Resto

(El desarrollo en $x=0$ es el desarrollo de McLaurin)
[Conocida la función en un punto x_0 , se estima el valor en un punto próximo x]

El desarrollo de Taylor para $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) = f(x_0, y_0) +$$

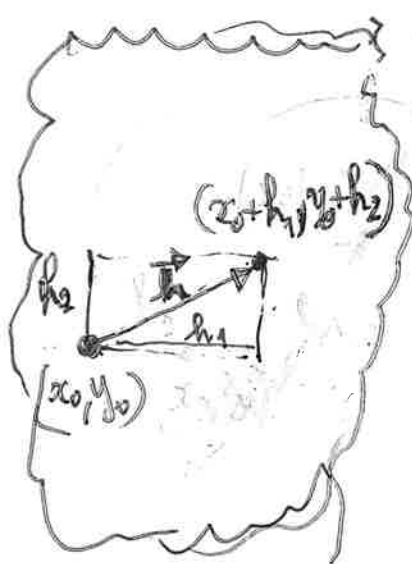
$$+ \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

$Hf(x_0, y_0)$

↑ matriz Hessiana

donde $(\xi_1, \xi_2) \in B((x_0, y_0), |h|)$



Extremos

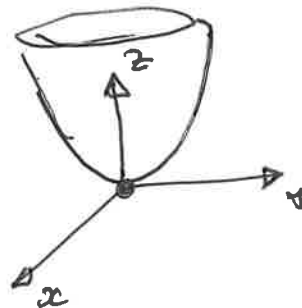
Ejemplos en $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$



Puntos críticos son aquellos en los que el plano tangente es horizontal. En ellos

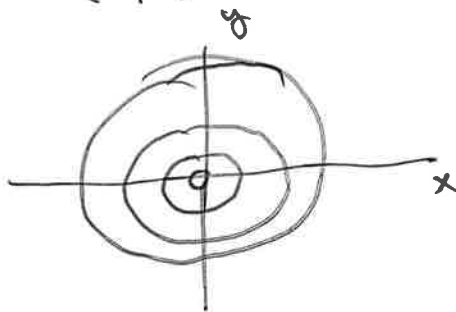
$$\nabla f = \vec{0}$$

Ejemplo 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x,y) \mapsto x^2 + y^2$



$$\nabla f = (0,0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,y) = (0,0)$$

El punto $(0,0)$ es un mínimo



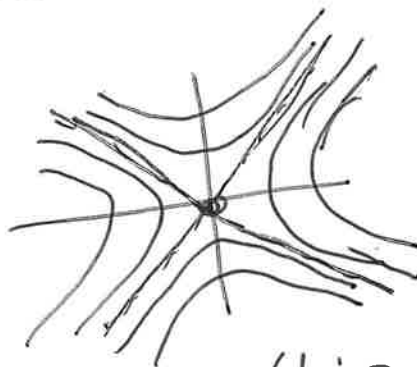
curvas de nivel

(9)

Ejemplo 2 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$

$$\nabla f = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y) = (0, 0)$$

Es un punto de ensilladura



La naturaleza de un punto crítico se decide estudiando la matriz de una forma cuadrática $\Rightarrow$ MATRIZ HESSIANA

$$Hf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\vec{x}_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

- Si $Hf(\vec{x}_0)$ es definida positiva $\rightarrow$ MÍNIMO RELATIVO
- Si $Hf(\vec{x}_0)$ es definida negativa $\rightarrow$ MÁXIMO RELATIVO
- Si $Hf(\vec{x}_0)$ es indefinida $\rightarrow$ No es EXTREMO (punto de silla)

[La matriz Hessiana es simétrica si se dan las condiciones del teorema de Schwarz de las derivadas cruzadas
 " D_{ij} existe y es continua, entonces $D_{ij} = D_{ji}$ "]

Criterios para clasificar una
forma cuadrática (matriz simétrica)

- Autovalores $\left\{ \begin{array}{l} \text{todos } \oplus \rightarrow \text{definida positiva} \\ \text{todos } \ominus \rightarrow \text{definida negativa} \end{array} \right.$

- Criterio de Hurwitz (Ver libro de Álgebra)

$$H = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \Delta_2 & \\ & & \Delta_3 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 > 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 > 0 \quad \oplus \\ \Delta_1 < 0 \quad \Delta_2 > 0 \quad \Delta_3 < 0 \quad \ominus \end{array} \right.$$

Ejemplo 1 $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{definida positiva}$
MINIMO RELATIVO

Ejemplo 2 $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{indefinida}$
NO ES EXTREMO

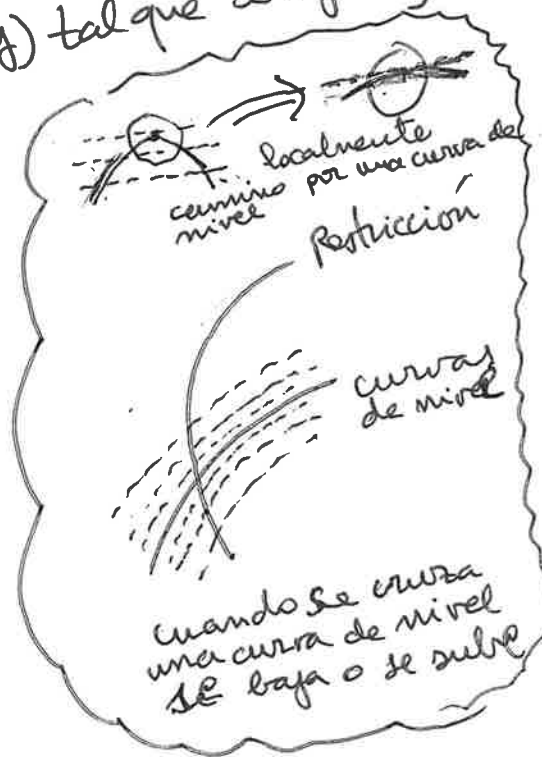
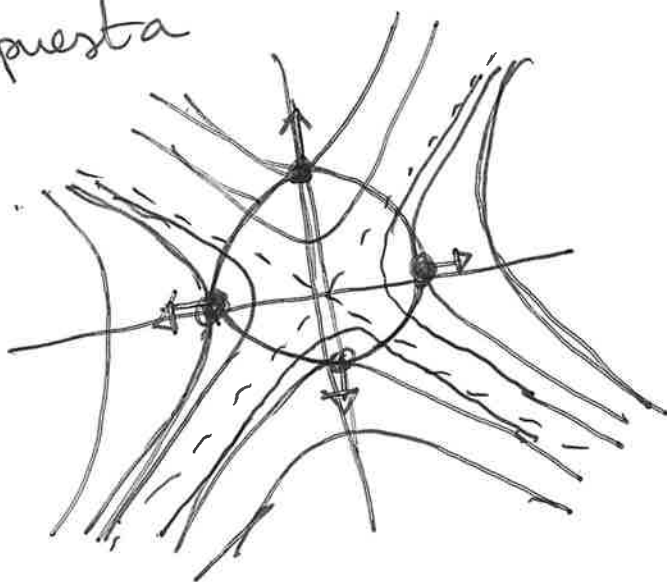
Extremos condicionados MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejemplo: Encontrar los extremos de

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

restringido a $S = \{(x,y) \text{ tal que } x^2 + y^2 = 1\}$

Respuesta



Si $f(x,y)$ está restringido por $g(x,y)=0$

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

(El gradiente de f es perpendicular al vector tangente de la restricción)

(12)

En el ejemplo

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

Hay que resolver (3 ecuaciones con 3 incógnitas)

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ -2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \nabla f = \lambda \nabla g \\ \text{restricción} \end{array} \right\}$$

$\Rightarrow \lambda = 1 ; y = 0 ; x = \pm 1 \rightarrow (1, 0), (-1, 0)$

$\lambda = -1 ; x = 0 ; y = \pm 1 \rightarrow (0, 1), (0, -1)$

Los puntos críticos son

$$(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)$$

Para ver si son máximos o mínimos evaluamos la función en los pts críticos

$$\left. \begin{array}{l} f(0, 1) = -1 \\ f(0, -1) = -1 \end{array} \right\} \text{mínimos}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1, 0) = 1 \\ f(-1, 0) = 1 \end{array} \right\} \text{máximos}$$

Diferencial

Sea $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

La diferencial de la función f en un punto es la aplicación lineal que mejor aproxima a la función en ese punto

Definición

La aplicación lineal $Df(\vec{x}_0): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la diferencial de f en $\vec{x}_0$

si existe

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) - Df(\vec{x}_0)(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0$$

→ Para que exista la diferencial en $\vec{x}_0$ es necesario, pero no suficiente, que existan las derivadas parciales.

→ De existir la diferencial Df es una aplicación lineal cuya matriz es el gradiente

→ Significado de la diferencial:
Incremento de $f = \Delta f = f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) \approx Df(\vec{x}_0)(\vec{h})$

Por ejemplo para el caso de
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

(14)

Se tiene que

$$Df(\vec{x})(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0, y_0) h_2$$

$$Df(\vec{x})(h, k) = \nabla f(\bar{x}_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

- Para garantizar la existencia de la diferencial no basta con que existan las derivadas parciales,
→ Si las derivadas parciales existen y son continuas, ~~si~~ se garantiza la existencia de la diferencial

Existen derivadas parciales



Hay diferencial

Hay diferencial



Hay derivadas en todas las direcciones

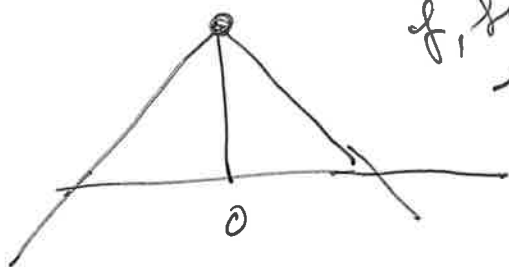
Existen derivadas parciales y son continuas



Hay diferencial

Ejemplo ilustrativo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto |x| + 1$$



f , función continua.
en $x=0$ existen las
dos derivadas
direccionales
pero no hay diferencial

funciones de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

16

Para funciones $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
 $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}) \dots f_m(\vec{x}))$

→ campos vectoriales. Por ejemplo, a un punto se le asocia un vector, como una fuerza

Derivada direccional

$$D_{\vec{v}} f(\vec{a}) = (D_{\vec{v}} f_1(\vec{a}) \dots D_{\vec{v}} f_m(\vec{a}))$$

Matriz Jacobiana

$$Df(\vec{a}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{a}) & D_2 f_1(\vec{a}) & \dots & D_n f_1(\vec{a}) \\ D_1 f_2(\vec{a}) & D_2 f_2(\vec{a}) & \dots & D_n f_2(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(\vec{a}) & D_2 f_m(\vec{a}) & \dots & D_n f_m(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x, y) = x - \tan y \\ f_2(x, y) = y^2 e^x \end{pmatrix}$

¿cuál la matriz jacobiana en un punto genérico (x, y) ? ¿cuánto vale en $(0, 0)$

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{\cos^2(x)} \\ y^2 e^x & 2y e^x \end{pmatrix}$$

$$Df(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diferencial

Una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable en un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ si existe una aplicación lineal $\lambda: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ que aproxima bien a f en $\vec{a}$, en el sentido de que

$$\lim_{\vec{h} \rightarrow \vec{0}} \frac{|f(\vec{a} + \vec{h}) - f(\vec{a}) - \lambda(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0$$

Si existe λ se dice que

$\lambda = Df(a)$ es la diferencial de f

Propiedades de las funciones diferenciables

1) Si la función es constante $Df = 0$

2) Si T es una aplicación lineal
 $DT(a)(\vec{x}) = T(\vec{x}) \quad \forall \vec{a}$

→ Si una aplicación es diferenciable su matriz es la matriz Jacobiana.

Reglas de derivación

1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable

$$D[cf](\vec{x}) = c Df(\vec{x})$$

2) Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciables

$$D[f+g](\vec{x}) = Df(\vec{x}) + Dg(\vec{x})$$

3) Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciables

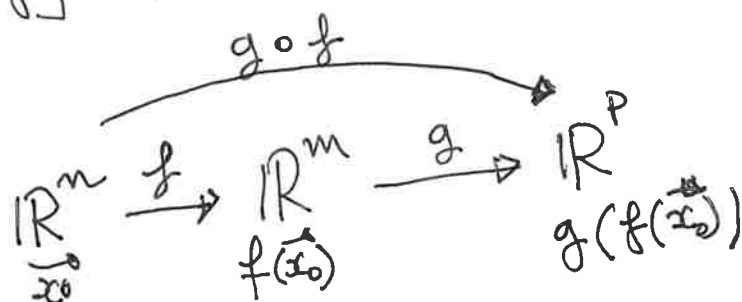
$$D[fg](\vec{x}) = g(\vec{x}) Df(\vec{x}) + f(\vec{x}) Dg(\vec{x})$$

$$D\left[\frac{f}{g}\right](\vec{x}) = \frac{g(x) Df(x) - f(x) Dg(x)}{[g(x)]^2}$$

Regla de la cadena

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ diferenciables

$$D[g \circ f](\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0)) \cdot Df(\vec{x}_0)$$



$$D[g \circ f](\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0)) \cdot Df(\vec{x}_0)$$

Ejemplo

Dada $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u+v \\ u \\ v^2 \end{pmatrix}$$

a) Usando la regla de la cadena
 calcular $D[g \circ f](1, 1)$

b) Hacerlo también directamente

Respuesta

b)
$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+1 \\ y^2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2+1+y^2 \\ x^2+1 \\ (y^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \left[f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = g \begin{pmatrix} x^2+1 \\ y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+y^2+1 \\ x^2+1 \\ y^4 \end{pmatrix}$$

$$D[g \circ f] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \\ 0 & 4y^3 \end{pmatrix}$$

$$D[g \circ f] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

a)

$$Dg(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u} & \frac{\partial g_1}{\partial v} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u} & \frac{\partial g_2}{\partial v} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u} & \frac{\partial g_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

cuando $(x, y) = (1, 1)$

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$D(g \circ f)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = Dg\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot Df\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

→ Una aplicación de la regla de la cadena es el cambio de sistemas de coordenadas

→ Ejemplo

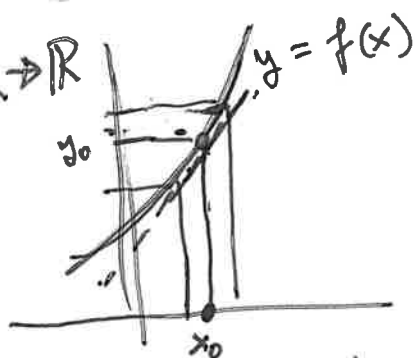
$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \end{matrix}} \quad \frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right)$$

Ver mapa en otros apuntes
Teorema de la función inversa
LOCAL

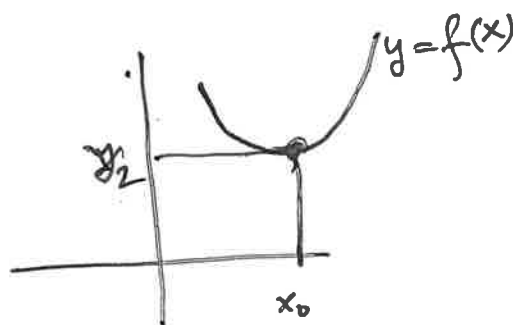
(21)

Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



se puede invertir
 en un entorno de x_0
 [f es inyectiva]

$$f'(x_0) \neq 0 \quad \left[\text{además } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \right]$$



no se puede
 invertir en
 un entorno
 de x_0

$$f'(x_0) = 0$$

Si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

es una aplicación lineal de matriz

$$f(\vec{x}) = M \vec{x}$$

para que f se pueda invertir en
 un punto x_0 tiene que ser

$$\det(M) \neq 0$$

por aproximación:

Para que una función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
 tenga inversa en un entorno de $\vec{x}_0$
 tiene que ser

$$\det [Df(\vec{x}_0)] \neq 0$$

[determinante
 del Jacobiano]

y además

$$D[f^{-1}(\vec{x}_0)] = [Df(\vec{x}_0)]^{-1}$$

→ Que haya inversa local en todos los puntos no significa que haya una inversa global

Para que haya inversa global la función debe ser inyectiva. Hay que imponer nuevas condiciones sobre la geometría del dominio

Teorema función inversa (Pag 129)

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$

• $f = (f_1 \dots f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función de clase C^q en A

$\vec{a} \in A$ y $\det(Df(\vec{a})) \neq 0$

Entonces existe un entorno abierto $V \subset A$ y un entorno abierto W de $f(\vec{a})$ tales que

1) $f(V) = W$

2) la restricción de f a V tiene inversa $f^{-1} : W \rightarrow V$ de clase C^q en W

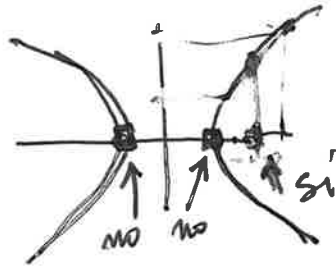
3) Para cada $y \in W$ se cumple que

$$[Df^{-1}(y)] = [Df(f^{-1}(y))]^{-1}$$

Teorema de la función implícita

consideremos la función

$$\Phi(x, y) = x^2 - y^2 - 1$$



$\phi(x, y) = 0$ es una hipérbola

¿ En que puntos x_0 se puede considerar que y es una función de x , en un entorno de x_0 ?

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -2y = 0$$

Esta derivada se anula cuando $y=0$
en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$
no se puede expresar y como una función de x

Para los casos en los que se pueda considerar y como una función de x , $y = y(x)$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

Version general del teorema de la función implícita

Sea $\Phi: A \subset \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase G^q
 $(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) \mapsto \Phi(\vec{x}, \vec{y})$

[llamamos $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$; $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$]

Si $\Phi(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{0}$

2) $\det (D_{n+i} \Phi_j(\vec{a}, \vec{b})) \neq 0$ determinante de orden m
 $i, j = 1, \dots, m$

Entonces existe un abierto $V \subset A$ que contenga a $(\vec{a}, \vec{b})$ y un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^m$ de $\vec{0}$ y una única función $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase $G^q(V)$ tales que

1) $\det [D_{n+i} \Phi_j(\vec{x}, \vec{y})] \neq 0$ $i, j = 1, \dots, m$

2) $\{(\vec{x}, \vec{y}) \in U \text{ tal que } \Phi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}\} =$
 $= \{(\vec{x}, \vec{y}) \in U \text{ tal que } \vec{x} \in V \text{ y } \vec{y} = \phi(\vec{x})\}$

Ejemplo Consideremos

$\Phi(x, y, z) = 0$ es una superficie en forma implícita
 los valores (x, y) para los que se puede expresar $z = \phi(x, y)$ aplicando la regla de la cadena a

$$\Phi(x, y, \phi(x, y)) = 0$$

[1] → Explicación usando la regla de la cadena

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_3 \phi_1 = 0 \Rightarrow \phi_1 = -\frac{\Phi_1}{\Phi_3} \\ \Phi_2 + \Phi_3 \phi_2 = 0 \Rightarrow \phi_2 = -\frac{\Phi_2}{\Phi_3} \end{cases}$$

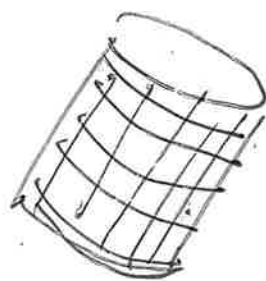
Por ejemplo: la superficie

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xz - 4 = 0$$

$$\Phi_1(x, y, z) = 2x - 2z$$

$$\Phi_2(x, y, z) = 2y$$

$$\Phi_3(x, y, z) = 2z - 2x$$



Si podemos escribir $z = \phi(x, y)$

$$\phi_1 = -\frac{2x - 2z}{2z - 2x} = \frac{2z - 2x}{2z - 2x} = 1$$

$$\phi_2 = -\frac{2y}{2z - 2x} = \frac{y}{x - z}$$

Para que exista función $z = \phi(x, y)$
 Es necesario que $\phi_3 \neq 0 \Rightarrow x \neq z$

[1]

25 bis

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{R}^3 \\
 \downarrow \text{Jacobian} & & \downarrow \text{Jacobian} \\
 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi(x,y) \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$\Phi \circ \alpha$ (curved arrow from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}$)
 $\xrightarrow{\quad \Phi \quad} \mathbb{R}$ (straight arrow from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}$)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ \phi(x,y) \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad \Phi \quad} \Phi(x, y, \phi(x,y))$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} \quad \left(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \right)$$

El Jacobiano de la composición es:

$$\left(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3 \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \phi_1 & \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 + \Phi_3 \phi_1 \\ \Phi_2 + \Phi_3 \phi_2 \end{pmatrix}$$

Como $\Phi(x, y, \phi(x,y)) = 0$ (cte)
 su Jacobiano es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \Phi_1 + \Phi_3 \phi_1 = 0 \\ \Phi_2 + \Phi_3 \phi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \phi_1 = -\frac{\Phi_1}{\Phi_3} \\ \phi_2 = -\frac{\Phi_2}{\Phi_3} \end{cases}$$

para que se puedan despejar las derivadas ϕ_1 y ϕ_2

$$\Phi_3 \neq 0$$

(condición del
 Teorema de la función
 implícita.)

Ejemplo

Sea $\Phi(x, y) = 0$

Supongamos que $y = \phi(x)$ [y es una función de x]

Calcular la derivada ϕ' en función de las derivadas parciales de Φ

[2] Explicación por la siguiente

$$\Phi(x, y) = \Phi(x, \phi(x)) = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dx} = \Phi_1 \cdot 1 + \Phi_2 \phi' = 0$$

$$\phi' = -\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

Ejemplo :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

derivando implícitamente respecto de x

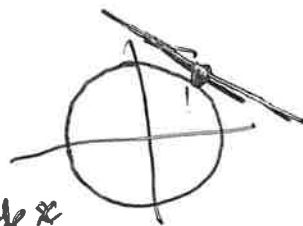
$$2x + 2y y' = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{2y} ; \quad y' = -\frac{x}{y}$$

$$\Phi_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x ; \quad \Phi_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y$$

En los puntos en los que no se puede expresar y como función de x en un entorno de $|\frac{\partial \Phi}{\partial y}| = 2y = 0 \Rightarrow y = 0$

En los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$



$$[2] \quad \mathbb{R} \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}$$

26 bis

$$x \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \phi(x) \end{pmatrix} \mapsto \Phi(x, \phi(x))$$

$\downarrow \text{jacobiano} \qquad \qquad \downarrow \text{jacobiano}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \phi' \end{pmatrix} \qquad (\Phi_1, \Phi_2)$$

El Jacobiano de la composición es:

$$(\Phi_1, \Phi_2) \begin{pmatrix} 1 \\ \phi' \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2 \phi'$$

Como $\Phi(x, \phi(x)) = 0$ (cte)
su jacobiano es

$$- \quad \Phi_1 + \Phi_2 \phi' = 0$$

$$\Rightarrow \phi' = - \frac{\Phi_1}{\Phi_2}$$

Para que x pueda despejarse ϕ' es necesario
que $\Phi_2 \neq 0$ (condición del teorema de
la función implícita.)

Ejemplo: (Sept 2022)

27

Pregunta: Sea

$$h(x,y) = 2xy - \frac{2}{x} + 5 \ln(y) = 0$$

Pruébe que h define a y como función implícita de x

$$y = g(x)$$

en un entorno de $(1,1)$ y determine la recta tangente a la gráfica de g en $x=1$

En un entorno del punto $(1,1)$ h es continua con derivadas parciales

$$h(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x + \frac{5}{y}$$

$$\text{por tanto } \left| \frac{\partial h}{\partial y}(1,1) \right| = |7| \neq 0$$

por tanto existe en un entorno de $(1,1)$ una función $y = g(x)$ tal que

$$h(x, g(x)) = 0$$

Derivando la ecuación $h(x,y)=0$ respecto de x , considerando y como función de x

$$2xg(x) - \frac{2}{x} + 5 \ln(g(x)) = 0$$

$$2g(x) + 2xg'(x) + \frac{2}{x^2} + 5 \frac{1}{g(x)} g'(x) = 0$$

(*)

La ecuación de la recta tangente
en $(1,1)$ es [ecuación punto-pendiente]

28

$$y-1 = g'(1)(x-1)$$

Si en la ecuación (*) particularizamos
para $x=1$ $y=1$,

$$2g(1) + 2g'(1) + 2 + \frac{5}{g(1)}g'(1) = 0$$

$$\text{como } g(1) = 1$$

$$2 + 2g'(1) + 2 + 5g'(1) = 0$$

$$\Rightarrow g'(1) = -\frac{4}{7}$$

Ecuación de la recta tangente

$$y-1 = -\frac{4}{7}(x-1)$$