allave@madrid.uned.es

idea intuitiva

TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

- Idea intuitiva
- Ejemplos de aplicación

(ver pág 122)

TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA

- Idea intuitiva
- Ejemplos de aplicación

(ver pág 129)

Cambio de variable

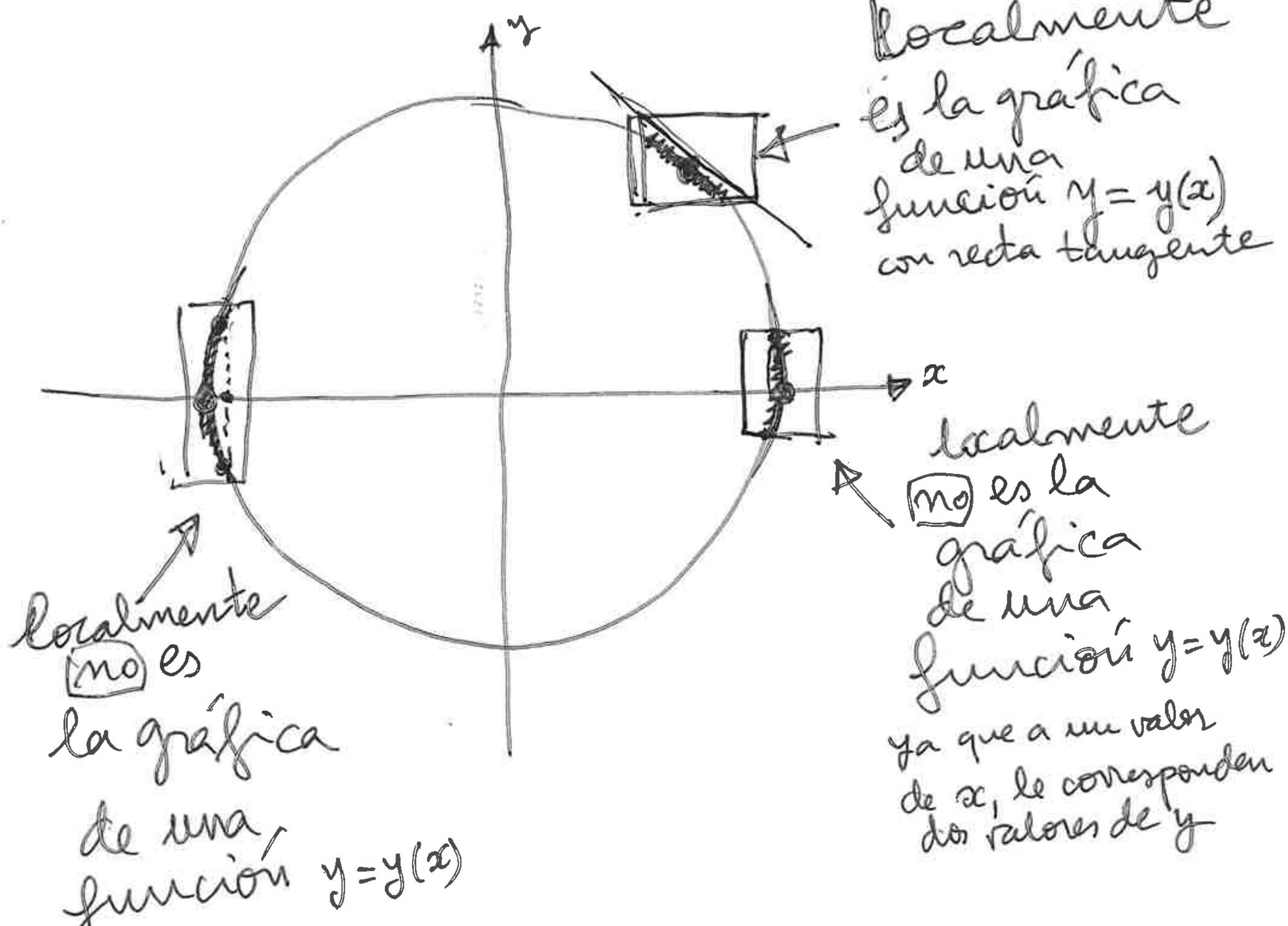
(ver pág 131)

MOTIVACIÓN. Un ejemplo sencillo

Curva en forma implícita

$$\boxed{x^2+y^2-1=0}$$ circunferencia de radio 1

$$F(x,y)=0$$



¿Cuál es la condición para que un trozo de la gráfica de una curva implícita

$$F(x,y)=0$$

se pueda expresar localmente como una función explícita $y=y(x)$?

Si consideramos el desarrollo de Taylor de la función $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un entorno del ~~punto~~ (x_0, y_0) tenemos una aproximación local de F

$$F(x,y) \approx \underbrace{F(x_0,y_0)}_{=0 \text{ (por ser un punto de la curva)}} + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) := 0$$

Si queremos despejar $\underline{y}$ en esta ecuación tenemos

$$y - y_0 = \frac{1}{\left(\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}\right)}\left[-\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}\right](x-x_0)$$

$$y - y_0 = \underbrace{\left[-\frac{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}}\right]}_{m}(x-x_0)$$

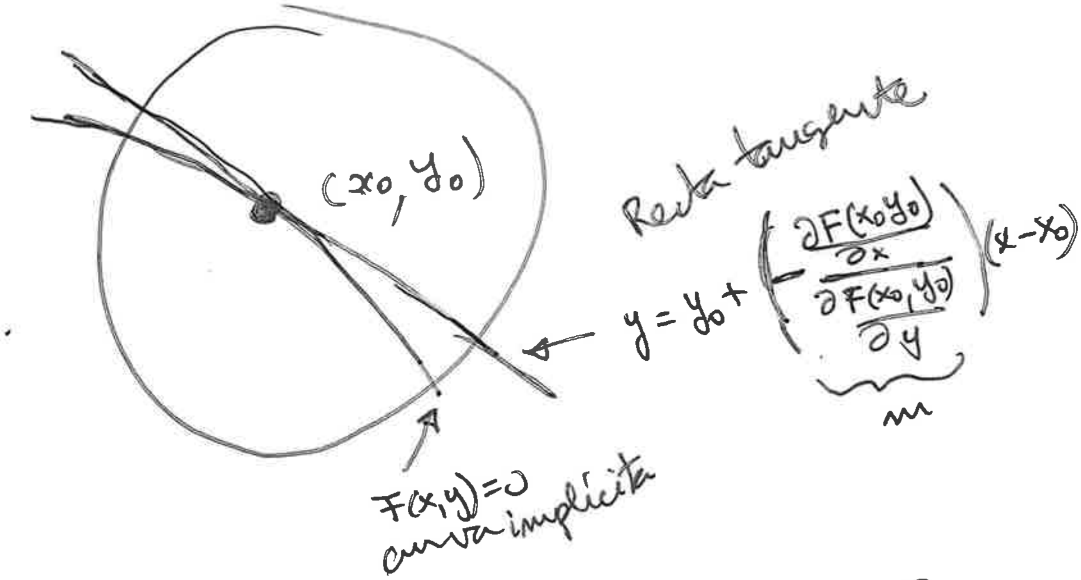
ecuación punto pendiente

comentario:

Esta es la ecuación de la recta tangente en (x_0, y_0) con pendiente

$$m = -\frac{\frac{\partial F(x_0y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0y_0)}{\partial y}}$$

Esto significa que, <u>localmente</u> podemos aproximar la gráfica de la ecuación $F(x,y)=0$ por la gráfica de la recta tangente en (x_0, y_0)



Esta recta tangente va a existir cuando exista la pendiente

$$m = - \frac{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}}$$

Es decir cuando $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$

(Suponiendo la regularidad necesaria a F)

$\boxed{\text{Idea intuitiva (varias dimensiones)}}$

Supongamos una aplicación lineal

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} F_1 = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}u + a_{14}v \\ F_2 = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}u + a_{23}v \end{pmatrix}$$

Consideremos el conjunto de $\mathbb{R}^4$ de las soluciones de la ecuación $F(x,y,u,v) = (0,0)$. Es decir, la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}u + a_{14}v = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}u + a_{24}v = 0 \end{cases}$$

Es un sistema de dos ecuaciones con cuatro incógnitas. En principio la solución general dependerá de dos parámetros. Si elgimos, $x = \lambda$, $y = \mu$, dos incógnitas como parámetros, tenemos el sistema

$$\begin{cases} a_{13}u + a_{14}v = -a_{11}x - a_{12}y \\ a_{23}u + a_{24}v = -a_{21}x - a_{22}y \end{cases}$$

La condición para que se pueda despejar <u>u</u> y <u>v</u> como función de x, y de ~~manera que~~

sistema sea compatible determinado.

Es decir,

$$\det \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \neq 0$$

Generalicemos a una función derivable

$$F\ \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} F_1(x,y,u,v) \\ F_2(x,y,u,v) \end{pmatrix}$$

Consideremos un punto $(x_0,y_0,u_0,v_0) = \vec{x_0} \in \mathbb{R}^4$

En un entorno de este punto podemos aproximar F_1 y F_2 "localmente" por una aplicación lineal

$$F_1(x,y,u,v) = F_1(x_0,y_0,u_0,v_0) + \frac{\partial F_1(\vec{x_0})}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F_1(\vec{x_0})}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F_1(\vec{x_0})}{\partial u}(u-u_0) + \frac{F_1(\vec{x_0})}{\partial v}(v-v_0)$$

$$F_2(x,y,u,v) = F_2(x_0,y_0,u_0,v_0) + \frac{\partial F_2(\vec{x_0})}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F_2(\vec{x_0})}{\partial y}(y-y_0) + \frac{\partial F_2(\vec{x_0})}{\partial u}(u-u_0) + \frac{\partial F_2(\vec{x_0})}{\partial v}(v-v_0)$$

De este modo, para que en la relación

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = 0 \\ F_2(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

Se pueda encontrar unas funciones

$u(x,y)$; $v(x,y)$ de

modo que en un entorno de (x_0,y_0,u_0,v_0)

Las soluciones de

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v)=0 \\ F_2(x,y,u,v)=0 \end{cases}$$

coincidan con las soluciones de

$$\begin{cases} F_1(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \\ F_2(x,y,u(x,y),v(x,y))=0 \end{cases}$$

en un entorno de (x_0,y_0,u_0,v_0), es

que

$$\det \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(\vec{x_0}) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(\vec{x_0}) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(\vec{x_0}) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(\vec{x_0}) \end{vmatrix} \neq 0$$

(para que así se pueda despejar u y v en el sistema de ecuaciones lineales que resulta de aproximar F_1 y F_2 por sus primeros términos del desarrollo de Taylor)

Enunciado intuitivo de la función implícita

Dado el sistema de $\underline{m}$ ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots x_n, z_1, \dots, z_m) = 0 \\ \text{------------} \\ F_m(x_1, \dots x_n, z_1, \dots z_m) = 0 \end{cases}$$

Si en un punto $(\vec{x_0}, \vec{z_0})$

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

Se puede despejar, localmente, en un entorno de ese punto $(\vec{x_0}, \vec{z_0})$ las variables $(z_1 \dots z_m)$

$$z_1 = z_1(x_1 \dots x_n)$$
$$z_2 = z_2(x_1 \dots x_n)$$
$$\text{------------}$$
$$z_m = z_m(x_1 \dots x_n)$$

en función de las $(x_1, \dots x_n)$

La regularidad de estas funciones es la de ~~las~~ de las funciones F_i

EJEMPLO DE APLICACIÓN DEL TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo 1 a) ¿Es posible despejar u y v, en función de x, y en la relación

$$\begin{cases} ux + yu^2v - 2 = 0 \\ xu^3 + y^2v^4 - 2 = 0 \end{cases} ?$$

en un entorno del punto $(x, y, u, v) = (1,1,1,1)$?

b) Calcular $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ en un entorno de $(x,y) = (1,1)$

Respuesta

Usando una notación como la del enunciado del teorema de la función implícita, consideramos

$$F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} F_1 = ux + yu^2v - 2 \\ F_2 = xu^3 - y^2v^4 - 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos la relación

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0 \\ F_2(x, y\, u, v) = 0 \end{cases}$$

para que en un entorno de $(1,1,1,1)$ se pueda despejar $u(x,y)$, $v(x,y)$ de modo que

$$\begin{cases} F_1(x, y, u(x,y), v(x,y)) = 0 \\ F_2(x, y, u(x,y), v(x,y)) = 0 \end{cases}$$

se debe verificar que

$$\underline{\Delta} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ en } (1,1,1,1)$$

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} x+2yuv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{en } (1,1,1,1)} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$$

No hace falta tener una expresión explícita de $u(x,y)$ y de $v(x,y)$ para que podamos calcular sus derivadas. Para ello usamos la regla de la cadena y derivamos implícitamente $\begin{cases} F_1 = 0 \\ F_2 = 0 \end{cases}$ respecto x:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[ux + yu^2v - 2\right] =$$

$$= u + x\frac{\partial u}{\partial x} + yu^2\frac{\partial v}{\partial x} + yv\,2u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[xu^3 - y^2v^4 - 2\right] =$$

$$= u^3 + x\,3u^2\frac{\partial u}{\partial x} - y^2\,4v^3\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

Particularizando en $(x, y, u, v) = (1,1,1,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + 1 + \frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 1 + 4\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1 \\ 3\frac{\partial u}{\partial x} + 4\frac{\partial v}{\partial x} = -1 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas usando la regla de Cramer

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,1) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(1,1) = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{9} = 0$$

Sept 2022

Sea $h(x,y) = 2xy - \frac{2}{x} + 5\ln(y) = 0$

Pruebe que $\underline{h}$ define a $\underline{y}$ como una función implícita de $\underline{x}$

$$y = g(x)$$

en un entorno de $(1,1)$ y determine la recta tangente a la gráfica de g en $x=1$

Respuesta

En un entorno del punto $(1,1)$, $\underline{h}$ es continua con derivadas parciales continuas

$$h(1,1) = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2x + \frac{5}{y}$$

Por tanto,

$$\left|\frac{\partial h}{\partial y}(1,1)\right| = |7| \neq 0$$

Como se cumplen las condiciones de la función implícita, en un entorno de $(1,1)$ existe una función $y = g(x)$

tal que $h(x, g(x)) = 0$

Derivando la ecuación $h(x,y)=0$ respecto de $\underline{x}$, considerando y como una función de x

$$h(x, g(x)) = 2x\,g(x) - \frac{2}{x} + 5\ln(g(x)) = 0$$

$$2g(x) + 2x\,g'(x) + \frac{2}{x^2} + 5\,\frac{1}{g(x)}\,g'(x) = 0$$

La ecuación de la recta tangente en $(1,1)$ es (ecuación punto-pendiente)

$$y - 1 = g'(1)(x-1)$$

Si en la ecuación (*) particularizamos para $x=1$, $y=1$

$$2g(1) + 2g'(1) + 2 + \frac{5}{g(1)}\,g'(1) = 0$$

como $g(1)=1$

$$2 + 2g'(1) + 2 + 5g'(1) = 0$$

$$\Rightarrow g'(1) = -\frac{4}{7}$$

Luego la ecuación de la recta tangente es

$$\boxed{y - 1 = -\frac{4}{7}(y-1)}$$

Junio 2023 A

1 (1 punto) Dada la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, tal que

$$F(x,y,z)=(z-y^2-x,\ z-y-2x+1)$$

consideremos el punto $P=(1,1,2)$. Utilizando el teorema de la función implícita, se pide estudiar si $F(x,y,z)=(0,0)$ define a $(y,z)=(g_1(x),g_2(x))$ como función diferenciable de y ý z en un entorno de $x=1$

Observación: La función F es de C^∞ ya que sus componentes son polinomios

Observación: $F(1,1,2)=(0,0)$

Consideremos ~~el~~ sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=z-y^2-x=0 & \leftarrow \text{(una superficie en implícitas cuadrica)} \\ F_2(x,y,z)=z-y-2x+1=0 & \leftarrow \text{(una superficie en implícitas cuadrica)} \end{cases}$$

(Las soluciones de este sistema define un conjunto de $\mathbb{R}^3$, que es una curva intersección de dos superficies, $F_1=0$ y $F_2=0$.

Es decir, son las ecuaciones implícitas de una curva)

Comentario:

Las funciones $\begin{cases} x = x \\ y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$ proporcionarían

unas ecuaciones paramétricas (locales) de la curva en un entorno de $P=(1,1,2)$

Comentario

(usar Wolfram Alpha o MAXIMA)

$z - y^2 - x = 0$

Es una cuádrica. Es un cilindro parabólico

$$(1,x,y,z)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$|A| = 0$ rango$(A) = 3$

$A_{00} = 0 \rightarrow$ rango$(A_{00}) = 1$

$z - y - 2x + 1 = 0$

Es un plano

La intersección de ambas superficies es una curva.

Comentario Observa que cuando $y = \frac{1}{2}$ no se puede aplicar el teorema de la función implícita ya que $\det\begin{pmatrix} -2y & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

$y = 1/2$

Según el teorema de la función implícita, para que ~~el~~ sistema

$$\begin{cases} F_1 = z - y^2 - x = 0 \\ F_2 = z - y - 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

defina ~~dos~~ funciones diferenciables en un entorno de $x=1$

$y = y(x)$; $z = z(x)$

es

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{en } (1,1,2)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2y & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

De otra manera de verlo

En un entorno de $(1,1,2)$

Si linealizamos la función F

$$\begin{cases} F_1(x,y,z) \approx F_1(1,1,2) + \frac{\partial F_1(1,1,2)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial F_1(1,1,2)}{\partial y}(y-1) + \frac{\partial F_1(1,1,2)}{\partial z}(z-2) \\ F_2(x,y,z) \approx F_2(1,1,2) + \frac{\partial F_2(1,1,2)}{\partial x}(x-1) + \frac{\partial F_2(1,1,2)}{\partial y}(y-1) + \frac{\partial F_2(1,1,2)}{\partial z}(z-2) \end{cases}$$

tomando $\underline{x}$ como parámetro para hallar la solución general del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(y-1) + \frac{\partial F_1}{\partial z}(z-2) = -\frac{\partial F_1}{\partial x}(x-1) \\ \frac{\partial F_2}{\partial y}(y-1) + \frac{\partial F_2}{\partial z}(z-2) = -\frac{\partial F_2}{\partial x}(x-1) \end{cases}$$

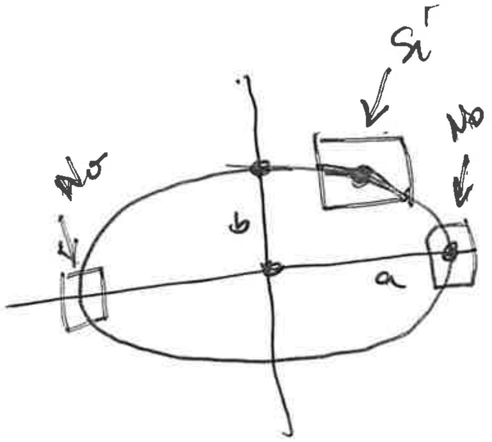
Se tiene que verificar que

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{pmatrix} \neq 0$$

Ejemplo de aplicación de la función implícita
Tangente a una elipse

Consideremos la ecuación implícita de una elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



¿Cuándo esta ecuación implícita

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

define localmente una función explícita

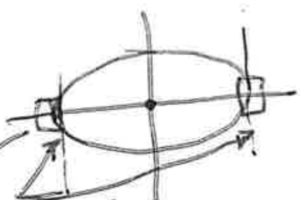
$y = y(x)$?

Según el teorema de la función implícita, existirá $y = y(x)$ tal que $F(x, y(x)) = 0$ es que

$$\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) \neq 0$$

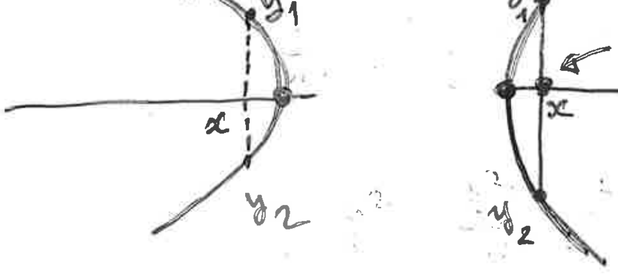
Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2} \neq 0$$



aquí no se puede definir $y = y(x)$

Existirá función $y(x)$ si $y \neq 0$



En las proximidades de estos puntos para un punto de x, corresponden dos valores de y. No se puede definir el valor de y como una función de x

¿Cuál es la dirección del vector tangente a una elipse en un punto (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$?

En ~~ese~~ punto así se puede considerar la $\underline{y}$ como una función de x.

Derivando implícitamente $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2} + \frac{2y\frac{dy}{dx}}{b^2} = 0; \quad \frac{x}{a^2} + \frac{y\frac{dy}{dx}}{b^2} = 0$$

$$b^2x + a^2y\frac{dy}{dx} = 0; \quad a^2y\frac{dy}{dx} = -b^2x$$

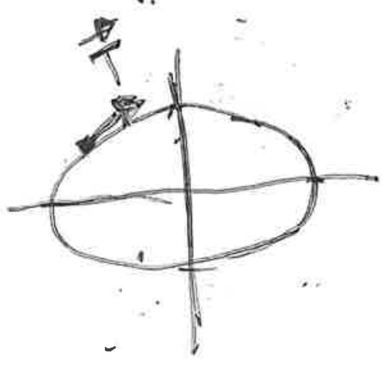
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$ (es la pendiente de la recta tangente)

Luego un vector tangente es un punto (x, y)

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{misma dirección}}}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} \\ -\frac{x}{a^2y} \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{misma dirección}}}{\approx} \begin{pmatrix} \frac{y}{b^2} \\ -\frac{x}{a^2} \end{pmatrix}$$

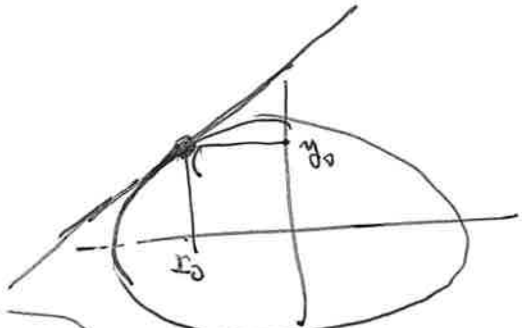
particularizando en el punto $(x_0\ y_0)$

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} \frac{y_0}{b^2} \\ -\frac{x_0}{a^2} \end{pmatrix}$$



La ecuación de la recta tangente a la elipse en uno de sus puntos (x_0, y_0), [con $y_0 \neq 0$]

Usando la fórmula punto pendiente



$$\boxed{y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)}$$

De otra manera. Como hicimos en el 1er ejemplo, utilizando la aproximación del teorema de Taylor de la función F

$$F(x,y) \approx \underbrace{F(x_0,y_0)}_{0 \text{ (por ser un punto de la curva)}} + \frac{\partial F(x_0 y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0 y_0)}{\partial y}(y - y_0)$$

Despejando en $F(x,y) = 0$ resulta que la ecuación de la recta tangente es

$$y - y_0 = \left[-\frac{\frac{\partial F(x_0 y_0)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x_0 y_0)}{\partial y}}\right](x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{\frac{2x_0}{a^2}}{\frac{2y_0}{b^2}}(x - x_0) \Rightarrow \boxed{y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}(x - x_0)}$$

$$F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \Rightarrow \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{2x_0}{a^2} \;;\; \frac{\partial F(x_0 y_0)}{\partial y} = \frac{2y_0}{b^2}$$

De otra manera. Dada la ecuación

$$F(x, y(x)) = 0$$

Deduciremos ~~la~~ expresión de $\frac{dy}{dx}$ utilizando la regla de la cadena.

Consideremos la siguiente composición de funciones

$$\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} x \\ y(x) \end{pmatrix} \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$$

Jacobiano $\downarrow$ $\qquad$ $\updownarrow$ Jacobiano

$$Dg = (1, y'(x)) \qquad Df = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{y'(x) = \frac{dy}{dx}}$$

$$D(f \circ g) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} \\ \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix}^t (1, y'(x)) =$$

$$= \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} y'$$

Por tanto, $y' = -\dfrac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}} = -\dfrac{b^2 x}{a^2 y}$

~~Teorema~~ de la Función inversa

Septiembre 2019 A

4 (1 punto)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x, y) = (x - y^2, \ x^2 - y^2)$$

¿Tiene inversa local en un entorno de $(0,1)$?

(Ver pág 129) Recordatorio

Tma de la función inversa

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1 \dots x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1 \dots x_n) \end{pmatrix}$$

una función de clase C^q

un punto $\vec{a} \in \mathbb{R}$.

Si ~~en~~ un punto

$$\det(f'(a)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\vec{a}} \neq 0$$

entonces f tiene una inversa (local) en un entorno de $\vec{a}$

Es decir, existe un entorno V de $\vec{a}$ y un entorno W de $f(\vec{a})$ tal que

1. $f(W) = V$
2. la restricción de f a W tiene una inversa $f^{-1}(W) \to V$ de clase C^q en W
3. Para cada punto $\vec{y} \in W$, se verifica que $[f'(\vec{y})] = \dfrac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$

Idea intuitiva

Si $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$
$\vec{x} \longmapsto \vec{y} = f(\vec{x})$

es una aplicación lineal, tiene una expresión matricial

$$y = A\vec{x}$$

La función inversa, f^{-1}, existe si $\det(A) \neq 0$ y, además, la aplición inversa tiene por matriz A^{-1}, ya que

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y}$$

Generalizando, si f es una matriz suficientemente regular podemos "localmente", en un entorno de $\vec{a}$, aproximar la función f por

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}}_{A = f'(\vec{a})} \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ (Jacobiano)

La condición para que haya inversa local es que $\det(f'(\vec{a})) \neq 0$

Septiembre 2019 A

4) (1 punto) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x,y) = (x - y^2, x^2 - y^2)$$

¿Tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0,1)$?

Comprobamos que se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa

1) f es diferenciable, ya que

$$f_1(x,y) = x - y^2$$
$$f_2(x,y) = x^2 - y^2$$

son funciones $\mathcal{C}^\infty$, por ser polinomios

2) $$\det(f'(x)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

$$= -2y + (2x)(2y) = 2y(2x-1)$$

En el punto $(0,1)$

$$\det(f'(0,1)) = -2 \neq 0$$

Por tanto, podemos afirmar que f sí tiene inversa local en $(0,1)$.

Cambios de variable

(ver pag 131)

__Definición__ Sea A un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una aplicación

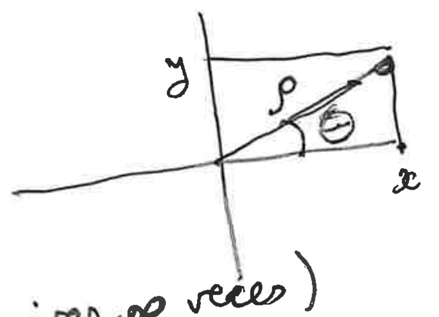
$$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

se dice que es un cambio de variable, aplicación regular o difeomorfismo de clase C^q si:

1) $f \in \mathcal{C}^q(A)$, $q \geq 1$
2) $\det(f'(x)) \neq 0$ para todo $x \in A$
3) f es inyectiva en A

__Ejemplos__ de ~~cambios~~ de coordenadas en $\mathbb{R}^2$ de polares a cartesianas y viceversa

Consideramos la función



$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(\rho,\theta) \mapsto \begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{pmatrix}$$

1) f es C^∞ (se puede derivar ∞ veces)

2) $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} =$

$= \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho \neq 0$

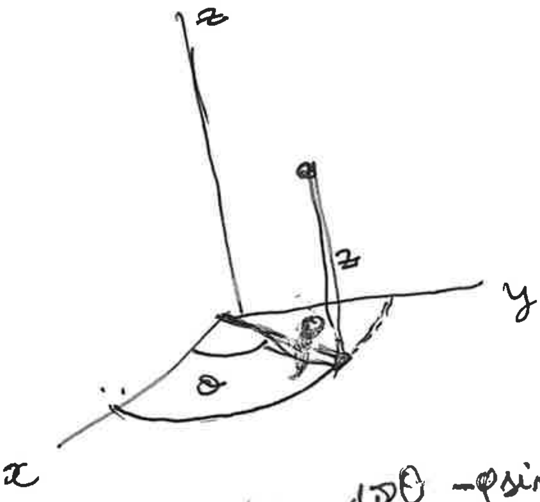
3) Como las funciones sin y cos son periódicas, para que sean inyectivas (inyectiva = ningún elemento del conjunto final tiene más de un original) el conjunto abierto A tiene que ser

$$A = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \rho > 0,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

en $\mathbb{R}^3$ cambio de coordenadas cilíndricas cartesianas y viceversa

Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{pmatrix}$$



$$\det(f'(\rho,\theta,z)) = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \rho$$

3) Para que f sea inyectiva

$$A = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \rho > 0, -\pi < \theta < \pi, z \in \mathbb{R}\}$$

Junio 2018 B

3) (1 punto) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = (e^x, x + y^2).$$

Estudie si f es un cambio de variable en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y > 0\}$$

Hay que comprobar las tres condicios

1) $f \in \mathcal{C}^\infty$ (se puede derivar ∞ veces)

2) $\det f' = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ 1 & 2y \end{pmatrix} =$

$$= \underbrace{2e^x}_{\text{no se anula nunca}} \underbrace{y}_{y > 0 \text{ en } A} \neq 0 \quad \text{si } (x, y) \in A$$

3) ¿f es inyectiva en A?

Recordatorio

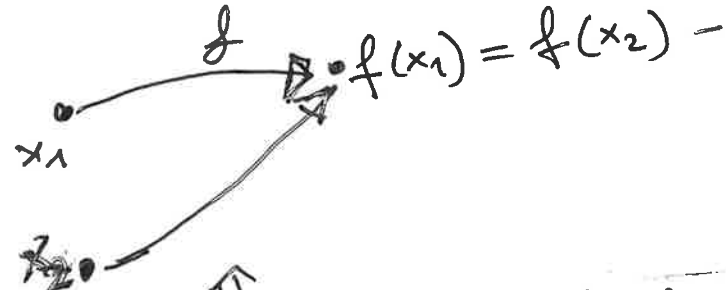
Definición de función inyectiva

Se dice que una función, f, es inyectiva si Dos elementos del conjunto original tienen la misma imagen, entonces necesariamente son iguales

$\Updownarrow$

Es decir,

Dos elementos distintos del conjunto original tienen imágenes distintas



Es decir, $\Updownarrow$

f es inyectiva sii $\left[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \right]$

$$\left. \begin{array}{l} e^{x_1} = e^{x_2} \\ x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \end{array} \Bigg\} \Rightarrow$$

como $x_1 = x_2$

$$\Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \Longrightarrow y_1 = y_2$$

como en A $y_1, y_2 > 0$

en definitiva $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Por tanto, $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es inyectiva en A