COMPLEMENTOS
de
MATEMÁTICAS

CURVAS

(resumen)

allave@madrid.uned.es

CURVAS

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{x} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}}$$

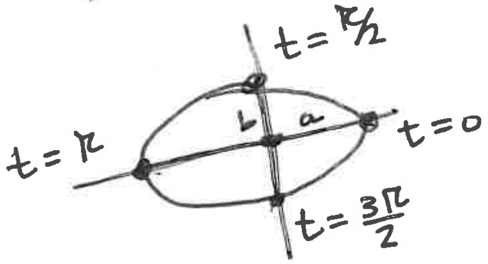
Representa una curva en forma PARAMÉTRICA

Interpretación: un punto del espacio se mueve según evoluciona el tiempo

Ejemplos:

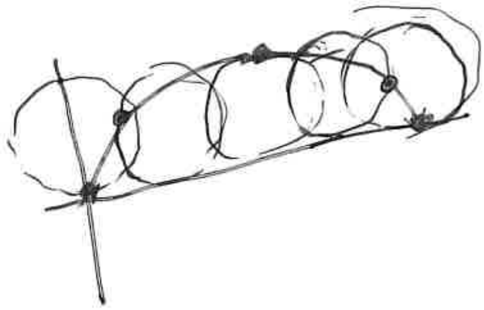
1) En $\mathbb{R}^2$, una elipse

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$



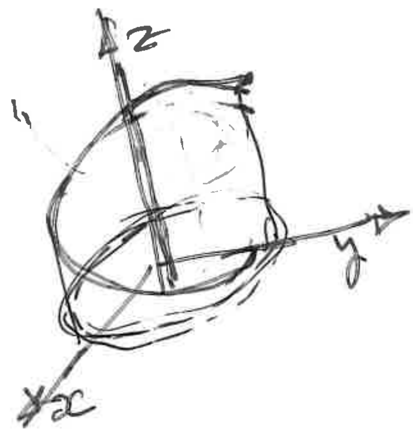
2) En $\mathbb{R}^2$, la cicloide

$$\begin{cases} x(t) = t - \sin(t) \\ y(t) = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi)$$



3) En $\mathbb{R}^3$, la hélice

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \\ z(t) = t \end{cases}$$



- Vector velocidad. Derivada

$$\vec{x}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{x}(t+h) - \vec{x}(t)}{h} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

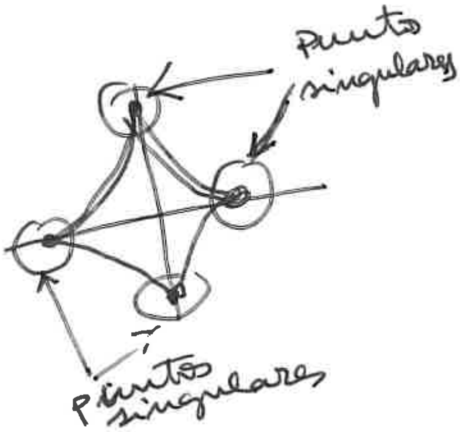
Ejemplos 1) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -a\sin(t) \\ b\cos(t) \end{pmatrix}$

2) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1-\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

3) $\vec{x}'(t) \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$

[$\|\vec{x}'(t)\|$ se suele llamar rapidez]

- PUNTOS REGULARES de una curva son aquellos en los que $\vec{x}'(t) \neq 0$



Ejemplo $\begin{cases} x = \cos^3(t) \\ y = \sin^3(t) \end{cases}$

$$\begin{cases} x'(t) = 3\sin(t)\cos^2(t) \\ y'(t) = 3\cos(t)\sin^2(t) \end{cases}$$

$\vec{x}'(t)$ se anula para los valores de t que anulan simultáneamente las dos componentes

$t=0 \to \vec{x}'(0) = (0,0) \to \vec{x}(0) = (1,0)$

$t=\pi/2 \to \vec{x}'(\frac{\pi}{2}) = (0,0) \to \vec{x}(\frac{\pi}{2}) = (0,1)$

$t=\pi \to \vec{x}'(\pi) = (0,0) \to \vec{x}(\pi) = (-1,0)$

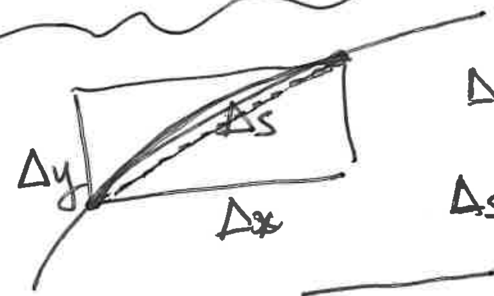
$t=\frac{3\pi}{2} \to \vec{x}'(\frac{3\pi}{2}) = (0,0) \to \vec{x}(\frac{3\pi}{2}) = (0,-1)$

- vector tangente (vector unitario)

$$\vec{t}(t) = \frac{\vec{x}'(t)}{\|\vec{x}'(t)\|}$$

LONGITUD DE ARCO

Motivación:



$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \approx \|\vec{x}'(t)\|$$

longitud de arco

$$s = \sum \Delta s = \sum \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \Delta t \approx \int \|\vec{x}'\| \, dt$$

$$\boxed{L_{a,b} = \int_a^b \|\vec{x}'(t)\| \, dt}$$

Recordatorio de reglas de derivación

1. Producto escalar

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{x}(t) \cdot \vec{y}(t)\right] = \vec{x}'(t) \cdot \vec{y}(t) + \vec{x}(t) \cdot \vec{y}'(t)$$

2. Escalar por un vector

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)\,\vec{x}(t)\right] = m(t)\,\vec{x}'(t) + m'(t)\,\vec{x}(t)$$

3. En $\mathbb{R}^3$, producto vectorial

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{x}(t) \times \vec{y}(t)\right] = \vec{x}(t) \times \vec{y}'(t) + \vec{x}'(t) \times \vec{y}(t)$$

4. Composición de funciones

$$(x \circ f)'(t) = x'(f(t))\, f'(t)$$

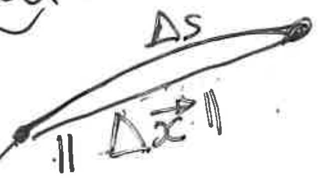
PARÁMETRO LONGITUD DE ARCO. VECTOR TANGENTE

Cuando se utiliza la longitud de arco como parámetro y se mide la velocidad (Como cuando se mide la velocidad de un coche por una carretera)

$$\vec t = \frac{d\vec x(s)}{ds}$$

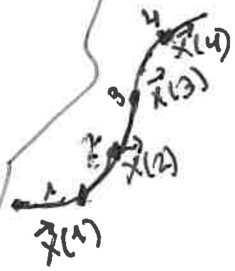
vector tangente unitario que tiene la dirección de $\vec x'(t)$ (tangente)

Comentario:



cuando el arco es pequeño

$$\Delta s \approx \Delta \|\vec x\|$$



portanto, si se usa como parámetro la longitud de arco

$$\frac{d\|\vec x(s)\|}{ds} \approx \frac{\Delta\|\vec x\|}{\Delta s} = 1$$

VECTOR NORMAL

$$\vec n(s) = \frac{\frac{d}{ds}\vec t(s)}{\left\|\frac{d}{ds}\vec t(s)\right\|}$$

→ vector de curvatura

Los vectores que no cambian de modulo sus derivadas son perpendiculares
Demostración $\|\vec u\|^2 = \vec u \cdot \vec u = cte$
$\Rightarrow d(\vec u \cdot \vec u) = 0$
Porque $d(\vec u \cdot \vec u) = 2\,\vec u \cdot \vec u' = 0 \Rightarrow \vec u \perp \vec u'$

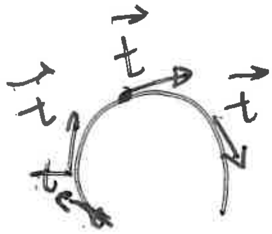
Como $\vec t$ no cambia de módulo

$$\frac{d\vec t}{ds} = \kappa \vec n = \frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\vec x(s)\right)$$

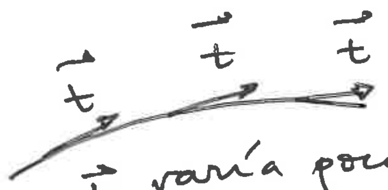
donde $\vec n$ es un vector unitario perpendicular a $\vec t$ que está en el plano $\langle \vec x', \vec x'' \rangle$

κ es la curvatura y mide lo que varía $\vec t$

$$\kappa = \left\|\frac{d^2\vec x(s)}{ds^2}\right\| = \|\text{vector de curvatura}\|$$



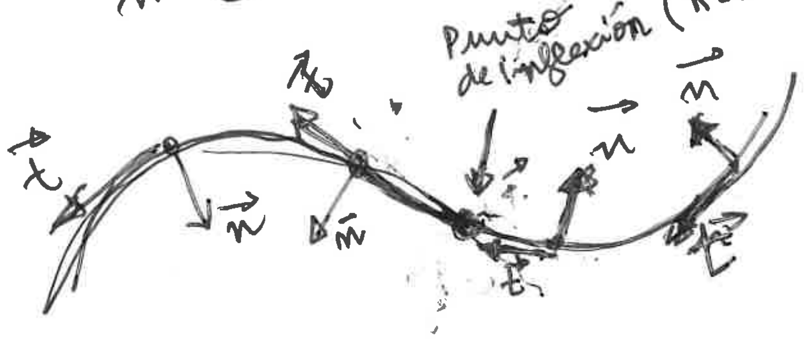
$\vec t$ varía mucho
κ es grande



$\vec t$ varía poco
κ es pequeña

$$\frac{1}{\kappa} = \rho = \text{radio de curvatura}$$

En los puntos de inflexión el vector $\vec n$ cambia de sentido ($\kappa = 0 \rightarrow \rho = \frac{1}{\kappa} = \infty$)



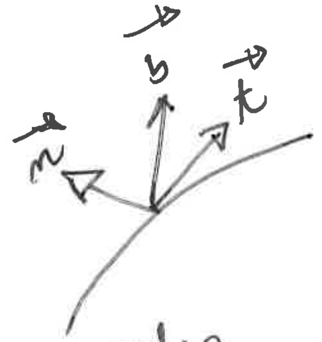
III VECTOR BINORMAL (en $\mathbb{R}^3$)

$$\vec b = \vec t \times \vec n$$

Como $\vec n = \vec b \times \vec t$

$$\frac{d\vec n}{ds} = \frac{d\vec b}{ds} \times \vec t + \vec b \, \frac{d\vec t}{ds}$$

$$= -\tau \underbrace{\vec n \times \vec t}_{\vec b} + \kappa \underbrace{\vec b \times \vec n}_{\vec t}$$



Triedro de Frenet.

Si se deriva

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\vec{t}\times\vec{n}\right] = \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{t}}{ds}\times\vec{n}}}_{0} + \vec{t}\times\frac{d\vec{n}}{ds} =$$

$$= \vec{t}\times\frac{d\vec{n}}{ds}$$

Por tanto $\frac{d\vec{b}}{ds}$ es perpendicular a $\vec{t}$

como $\|\vec{b}\|=1 = cte$, entonces $\frac{d\vec{b}}{ds}$ también es perpendicular a $\vec{b}$ y, por tanto, paralelo a $\vec{n}$. Así resultan las fórmulas de FRENET

FÓRMULAS DE FRENET

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = & \kappa\,\vec{n}(s) & \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\,\vec{t}(s) & & +\tau\,\vec{b}(s) \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} & -\tau\,\vec{n}(s) & \end{cases}}$$

Para curvas alabeadas en $\mathbb{R}^3$

Esto significa, intuitivamente, que si de una curva se conoce la curvatura y la torsión, se puede reconstruir la forma de la curva [salvo movimientos rígidos] resolviendo unas ecuaciones diferenciales]

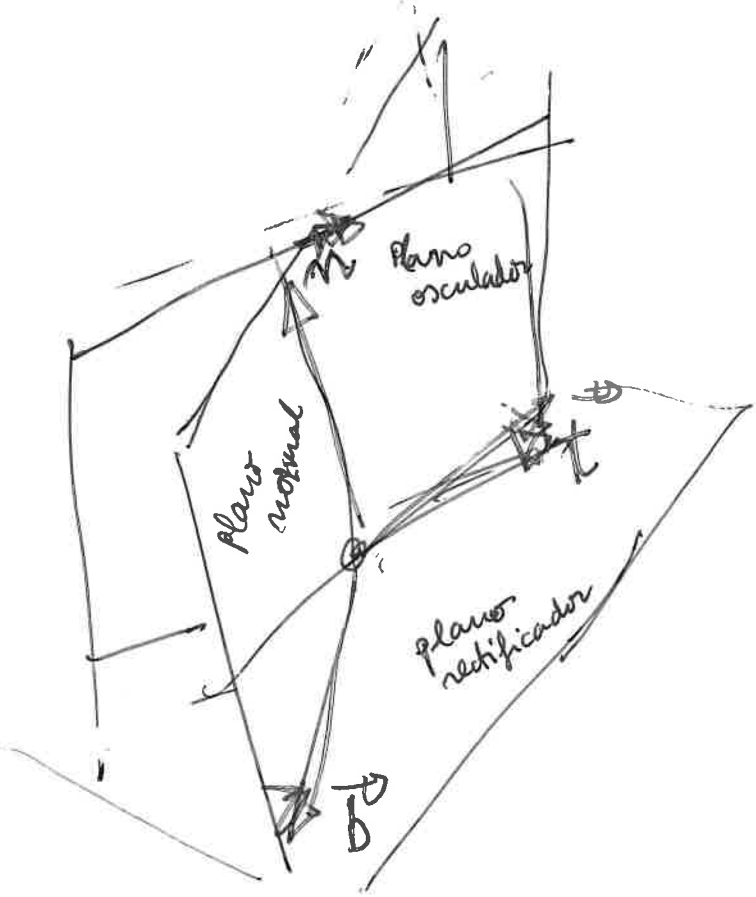
$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\,\vec{n}(s) \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\,\vec{t}(s) \end{cases}}$$

Para curvas planas $(\tau = 0)$ como caso particular de las curvas alabeadas

$$\kappa = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$$

si $\vec{t} = (a,b)$, $\vec{n} = (-b,a)$

Triedro de Frenet



Plano perpendicular a $\vec{t}$ → PLANO NORMAL
Plano perpendicular a $\vec{n}$ → PLANO RECTIFICADOR
Plano perpendicular a $\vec{b}$ → PLANO OSCULADOR

En ecuaciones paramétricas cualquiera

$\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$

$\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$

$\vec{n}$ tiene la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$

$$\kappa = \frac{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|}{\| \vec{x}'(t) \|^3}$$

$$\tau = \frac{[\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)]}{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|^2}$$ ← determinante

9 bis

Curvas planas

$\vec{x}(t) = (x(y), y(t))$ curva

$\vec{x}'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ (vector velocidad)

- Vector tangente: vector unitario en la dirección de $\vec{x}'$

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}'(t)}{\| x'(t) \|}$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{ds}$$ (derivada respecto la longitud de arco)

- Vector de curvatura

$$\vec{k}(s) = \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2}$$

curvatura $K(s) = \| \vec{k}(s) \|$

$\vec{k}(s) = K(s)\, \vec{n}(s)$

- vector normal

vector perpendicular al vector tangente

Si $\vec{t} = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$

$\vec{n} = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$

- Cálculo de la curvatura con una parametrización cualquiera

$$K(t) = \frac{\det[\vec{x}', \vec{x}'']}{\| \vec{x}' \|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + x'^2)^{3/2}}$$

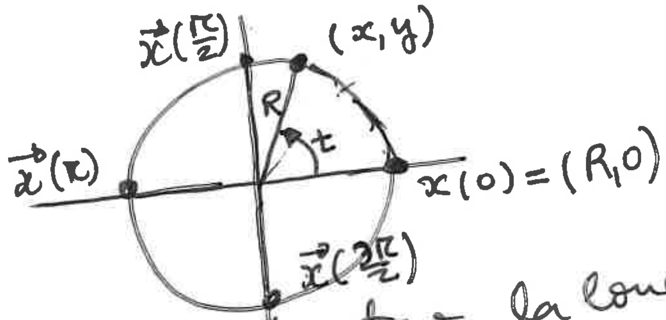
con la notación:

$\vec{x}' = (x', y')$; $\vec{x}'' = (x'', y'')$

Ejemplo : CIRCUNFERENCIA (curva plana)

Ecuación paramétrica de la circunferencia $\underline{C}$

$$\vec{x}(t) = (R\cos(t), R\sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi)$$



Utilizando como parámetro la longitud de arco $s = Rt \Rightarrow t = \frac{s}{R}$. ~~la~~ ecuación de C es

$$\vec{x}(s) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

■ Vector tangente $\vec{t} = \frac{d\vec{x}}{dt}$

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{x}}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{R} = R\vec{t}$$

comprobamos haciendo de diferentes maneras

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (-R\sin(t), R\cos(t)) = R\underbrace{(-\sin(t), \cos(t))}_{\vec{t}}$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \left(-R\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right), R\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) =$$

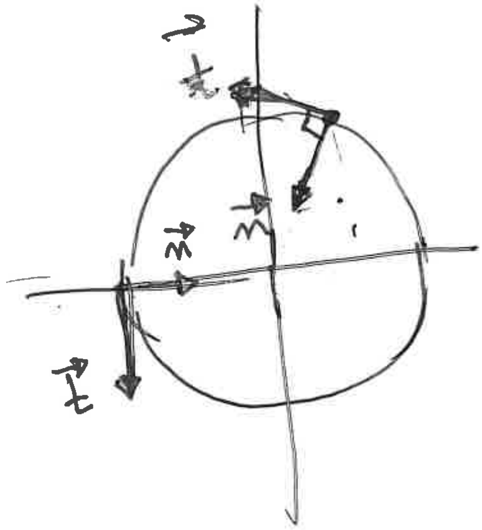
$$= (-\sin(t), \cos(t)) = \vec{t}$$

■ vector normal

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{R}} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\kappa} \underbrace{(-\cos(t), -\sin(t))}_{\vec{n}}$$

$\uparrow$ curvatura

Radio de curvatura $= \frac{1}{\kappa} = R$



Fórmula de Frenet

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{t}}{ds} &= \kappa \vec{n}(s) \\ \frac{d\vec{n}}{ds} &= -\kappa \vec{t}(s) \end{aligned}}$$

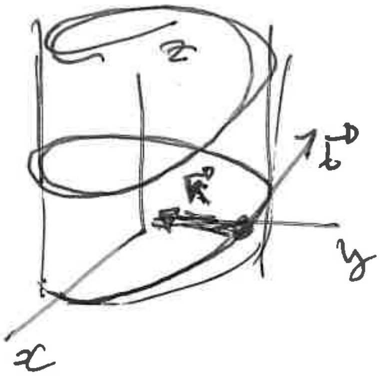
comprobación para la circunferencia

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{n}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{R}} = \frac{1}{R}\left(\sin(t), -\cos(t)\right) =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{R}}_{-\kappa} \underbrace{\left(-\sin(t), \cos(t)\right)}_{\vec{t}}$$

Ejemplo LA HÉLICE

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = a\sin(t) \\ z(t) = b\,t \end{cases}$$



$$\frac{d\vec{x}}{dt} = (-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

$$\left|\frac{d\vec{x}}{dt}\right| = \sqrt{[-a\sin(t)]^2 + [a\cos(t)]^2 + b^2} =$$

$$= \sqrt{a^2\sin^2(t) + a^2\cos^2(t) + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$$

vector tangente

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{x}}{dt}}{\left\|\frac{d\vec{x}}{dt}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin(t), a\cos(t), b)$$

longitud de arco

$$s(\alpha) = \int_0^\alpha \left|\frac{dx}{dt}\right| dt = \int_0^\alpha \sqrt{a^2+b^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, t\Big]_0^\alpha =$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}\,\alpha.$$

cuando $\alpha = t$

$$s(0,t) = \sqrt{a^2+b^2}\, t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\, s$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{a^2+b^2} \quad ; \quad \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Si escribimos la curva parametrizada por la longitud de arco comprobamos lo anterior (13)

$$x(s) = \left(a\cos\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right), a\sin\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s\right), b\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}s \right)$$

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\sin(t), a\cos(t), b\right)$$

comprobamos también que

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \underbrace{\frac{dx}{ds}}_{\vec{t}} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \vec{t}$$

Vector curvatura

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(-a\cos(t), -a\sin(t), 0\right)}_{\frac{d\vec{t}}{dt}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\frac{dt}{ds}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(-a\cos(t), -a\sin(t), 0\right)$$

Observación: (*) $\vec{k}$ es paralelo al eje XY y dirigido hacia el origen

(*) La curvatura es constante

$$\vec{k} = \frac{-a}{a^2+b^2}\left(\cos(t), \sin(t), 0\right)$$

(curvatura no depende de t)

$$\kappa = |\vec{k}| = \frac{a}{a^2+b^2}$$

(#4)

El vector normal es el vector unitario en la dirección de

$$\vec{n} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|} = \frac{\frac{d}{ds}(\vec{t})}{\|\frac{d}{ds}(\vec{t})\|} = \frac{\frac{d}{ds}\left(\frac{d}{ds}\vec{x}(s)\right)}{\|\frac{d}{ds}\left(\frac{ds}{ds}\vec{x}(s)\right)}$$

En nuestro caso

$$\vec{n} = \frac{\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)}{\|\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)\|} = \frac{\frac{-a}{a^2+b^2}(\cos(t), \sin(t), 0)}{\frac{a}{a^2+b^2}}$$

$$= (-\cos(t), -\sin(t), 0)$$

El vector binormal

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

$$\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(t) & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(t) & \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -a\sin(t) & a\cos(t) & b \\ -\cos(t) & -\sin(t) & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b\sin(t), -b\cos(t), a\sin^2(t) + a\cos^2(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b\sin(t), -b\cos(t), a\right)$$

Vamos a calcular la torsión

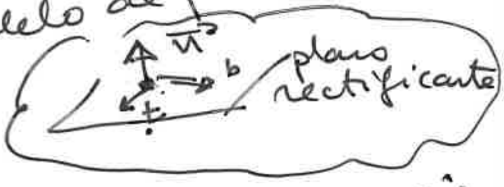
$$\frac{d\vec b}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\vec t \times \vec n\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\vec t \times \vec n + \vec t \times \frac{d}{ds}\vec n =$$

$$= \kappa \underbrace{\cancel{\vec n \times \vec n}}_{=0} + t \times \frac{d}{ds}\vec n =$$

$$= \vec t \times \frac{d\vec n}{ds}$$

~~Como~~ $\vec n$ es un vector unitario, su derivada es perpendicular a $\vec n$ y por consiguiente es paralelo al plano rectificante,



$$\frac{d\vec n}{ds} = \lambda \vec t + \tau \vec b$$ ($\frac{d\vec n}{ds}$ es una combinación lineal de $\vec t$ y $\vec b$)

Sustituyendo

$$\frac{d\vec b}{ds} = \vec t \times \left[\lambda \vec t + \tau b\right] = \lambda \underbrace{\cancel{\vec t \times t}}_{0} + \tau \vec t \times \vec b$$

(ya que $b \times t = -\vec n$)

$$= -\tau \vec n$$

Para calcular $\vec n$ hacemos el producto escalar de los dos miembros

$$\vec n \cdot \frac{d\vec b}{ds} = -\tau \underbrace{(\vec n \cdot \vec n)}_{1}$$

$$\tau = -\frac{d\vec b}{ds} \cdot \vec n$$

En nuestro caso

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{dt} \cdot \underbrace{\frac{dt}{ds}}_{\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}} = \frac{1}{a^2+b^2} \left(b\cos(t), b\sin(t), 0 \right)$$

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \left(b\cos(t), b\sin(t), 0 \right)$$

$$\tau = - \frac{d\vec{b}}{ds} \cdot \vec{n} =$$

$$= - \frac{1}{a^2+b^2} \left(b\cos(t), b\sin(t), 0 \right) \cdot \left(-\cos(t), -\sin(t), 0 \right)$$

$$= - \frac{1}{a^2+b^2} \left(-b\cos^2(t) - b\sin^2(t) + 0 \right) =$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

comentario: la torsión es constante a lo largo de toda la curva

En resumen para la hélice

$$\vec{x}(t) = (a\cos(t),\ a\sin(t),\ bt)$$

Triedo de Frenet

$$\begin{cases} \vec{t} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\sin(t),\ a\cos(t),\ b) \\ \vec{n} = (-\cos(t),\ -\sin(t),\ 0) \\ \vec{b} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(b\sin(t),\ -b\cos(t),\ a) \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{a}{a^2+b^2} \quad ; \quad \tau = \frac{b}{a^2+b^2}$$

Comprobamos que

$$\begin{cases} \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b} \\ \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \\ \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \end{cases} \qquad \begin{cases} \|\vec{t}\| = 1 \\ \|\vec{n}\| = 1 \\ \|\vec{b}\| = 1 \end{cases}$$

$$\det(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = 1$$

FÓRMULAS de FRENET

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa\vec{n} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa\vec{t} + \tau\vec{b} \\ \dfrac{d\vec{b}}{dt} = -\tau\vec{n} \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}(-a\cos(t),\ -a\sin(t),\ 0)$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d\vec{n}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds} = (\sin(t),\ -\cos(t),\ 0)\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{1}{a^2+b^2}(b\cos(t),\ b\sin(t),\ 0)$$