

COMPLEMENTOS  
de  
MATEMÁTICAS

PROBLEMA

Multiplificadores de  
Lagrange

allave@madrid.uned.es

Sea  $f$  la función dada por

$$f(x, y, z) = xz - y^3$$

y  $S$  la esfera determinada por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Elija la respuesta correcta

a)  $f$  alcanza el máximo sobre  $S$  en  $(0, 1, 0)$

b)  $f$  alcanza el mínimo sobre  $S$  en  $(0, 1, 0)$

c)  $f$  alcanza un ~~mínimo~~ relativo pero no absoluto sobre  $S$  en  $(0, 1, 0)$

d) Ninguna de las anteriores

## Multiplicadores de Lagrange

(2)

Los elementos de un problema de extremos condicionados

(MULTIPLICADORES de LAGRANGE) son  
[Usamos  $\mathbb{R}^3$ , pero podría ser cualquier  $\mathbb{R}^n$ ]

■ función escalar

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

■ Una restricción

$$g(x, y, z) = 0$$

Los extremos de la función  $f$  restringido a los valores que toma en la restricción verifican

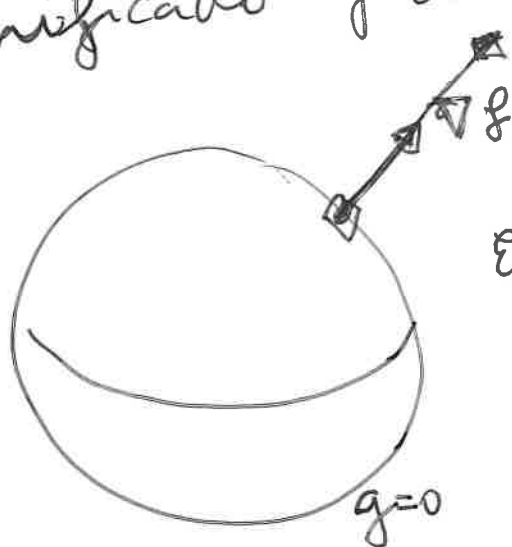
$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

Desarrollando

(3)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \lambda \frac{\partial g}{\partial z} \\ f = 0 \end{cases}$$

Significado geométrico



En los extremos,  
los vectores  
 $\nabla f$  y  $\nabla g$  tienen  
la misma dirección

[El vector normal,  $\nabla g$ , a la superficie  
 $g=0$  tiene la misma dirección que  
 $\nabla f$ , que es en la que más varía la  
función  $f$ ]



(4)

En nuestro caso:

$$\nabla f = (z, -3y^2, x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$\nabla g = (2x, 2y, 2z) = \left( \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right)$$

Luego, tenemos que resolver

$$(*) \begin{cases} z = \lambda 2x & [1] \\ -3y^2 = \lambda 2y & [2] \\ x = \lambda 2z & [3] \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & [4] \end{cases}$$

Substituyendo [3] en [1],

$$z = \lambda 2 \cdot \lambda 2z \Rightarrow \boxed{z = 4\lambda^2 z}$$

Si  $z \neq 0$

De donde,  $4\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$

En la ecuación [2] Si  $y \neq 0$

$$-3y = 2\lambda \Rightarrow y = -\frac{2}{3}\lambda \Rightarrow$$

$$y = \begin{cases} y_1 = -\frac{1}{3} \\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(para  $\lambda = \frac{1}{2}$ )

(para  $\lambda = -\frac{1}{2}$ )

De la ecuación [1] tenemos  
que si  $\lambda = \frac{1}{2}$

$$z = x \quad (\Rightarrow \quad z^2 = x^2)$$

y sustituyendo en [4]

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + x^2 = 1 = 0$$

$$2x^2 + \frac{1}{9} - 1 = 0$$

$$x^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} & = z_1 \\ x_2 = -\frac{2}{3} & = z_2 \end{cases}$$

De la ecuación [1] tenemos que si  
 $\lambda = -\frac{1}{2}$ ,

$$z = -x \quad (\Rightarrow \quad x^2 = z^2)$$

Sustituyendo en 4

$$x^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + x^2 = 1 = 0$$

$$2x^2 + \frac{1}{9} - 1 = 0$$

Lo mismo que antes,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3} = -z_1 \\ x_2 = -\frac{2}{3} = -z_2 \end{cases}$$

Así pues las posibles soluciones  
de (\*) son

(6)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3}, \quad x = -\frac{2}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3}, \quad z = -\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Punto } P_1 = \left( \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

$$P_2 = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{2}{3}, \quad x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\frac{2}{3}, \quad z = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{Puntos: } P_3 = \left( \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$P_4 = \left( -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

(7)

Si  $\boxed{z=0}$  sustituyendo en [3]

resulta que  $x=0$  con lo cual

$$0^2 + y^2 + 0^2 = 1$$

y, por tanto  $y = \pm 1$

$$P_5 = (0, 1, 0)$$

$$P_6 = (0, -1, 0)$$

Otras posibles soluciones puede ser cuando

$$\boxed{y=0} \text{ con } z^2 = x^2$$

$$x^2 + 0^2 + x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2x^2 = 1$$

$$P_7 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$P_8 = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$P_9 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$P_{10} = \left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

(8)

Ahora tenemos que evaluar la función en estos puntos para ver en cuáles se alcanzan el máximo y el mínimo.

$$f(x, y, z) = xz - y^3$$

$$\bullet f(P_1) = f\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{13}{27} = 0,481$$

$$\bullet f(P_2) = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = \frac{13}{27} = 0,481$$

$$\bullet f(P_3) = f\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{27} = -0,481$$

$$\bullet f(P_4) = f\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = -\frac{13}{27} = -0,481$$

|                            |        |
|----------------------------|--------|
| $f(P_5) = f(0, 1, 0) = -1$ | MÍNIMO |
| $f(P_6) = f(0, -1, 0) = 1$ | MAXIMO |

$$f(P_7) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$f(P_8) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$f(P_9) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} = -0,5$$

$$f(P_{10}) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} = -0,5$$