

Ecuaciones Diferenciales

PROBLEMAS
de ECUACIONES
LINEALES
orden superior

allave@madrid.uned.es

Sea la ecuación diferencial

$$x^2 y'' + x y' - y = 0$$

a) A partir de la solución $y_1 = x^{-1}$ obtener, aplicando el método de reducción de orden, una segunda solución y_2 linealmente independiente de la primera y_1 , por consiguiente, su solución general

b) Aplíquese el método de variación de las constantes para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea

$$x^2 y'' + x y' - y = x^2$$

y con ella la solución general

a) Es una ecuación lineal. Queda más claro si se escribe así:

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right)y' + \left(-\frac{1}{x^2}\right)y = 0$$

Comprobamos que $y_1 = \frac{1}{x}$ verifica la ecuación (3)

$$y_1 = \frac{1}{x}; \quad y_1' = -\frac{1}{x^2}; \quad y_1'' = \frac{2}{x^3}$$

En efecto, verifica la ecuación

$$x^2 \left(\frac{2}{x^3} \right) + x \left(-\frac{1}{x^2} \right) - \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

En el método de reducción de orden se hace el cambio

$$y = y_1 \cdot u$$

En nuestro caso $y = \frac{1}{x} u$

$$y' = -\frac{1}{x^2} u + \frac{1}{x} u'$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} u - \frac{1}{x^2} u' + \left(-\frac{1}{x^2} \right) u' + \frac{1}{x} u''$$

$$= \frac{2}{x^3} u - \frac{2}{x^2} u' + \frac{1}{x} u''$$

Sustituyendo en la ecuación

(4)

$$x^2 \left(\frac{2}{x^3} u - \frac{2}{x^2} u' + \frac{1}{x} u'' \right) + x \left(-\frac{1}{x^2} u + \frac{1}{x} u' \right) - \frac{1}{x} u = 0$$

$$\frac{2}{x} u - 2u' + x u'' - \frac{1}{x} u + u' - \frac{1}{x} u = 0$$

$$x u'' + u'(-2+1) + u \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \right) = 0$$

$$x u'' - u' = 0$$

Se hace el cambio $u' = w$

$$x w' - w = 0$$

$$x \frac{dw}{dx} - w = 0$$

Es una ecuación de variables separables

$$x \frac{dw}{dx} = w \Rightarrow \frac{dw}{w} = \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(w) = \ln(x) + C$$

$$\ln(w) = \ln(x) + C \Rightarrow w = C_1 x$$

desahaciendo los cambios ($w = u'$)

$$u = \int C_1 x dx = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$= C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

Desahaciendo $y = \frac{1}{x} u$

(5)

$$y = \frac{1}{x} (c_1 x^2 + c_2) = c_1 x + c_2 \frac{1}{x}$$

Luego son soluciones fundamentales

$$\left\{ y_1 = x, \quad y_2 = \frac{1}{x} \right\}$$

La solución general de la homogénea

$$y = c_1 x + c_2 \left(\frac{1}{x} \right)$$

b) Para aplicar el método de variación de las constantes, ensayamos una función de la forma

$$y = c_1(x) x + c_2(x) \frac{1}{x}$$

Las funciones c_1' y c_2' deben verificar

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_1' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F(x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ F & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{-y_2 F}{W} \\ c_2' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & F \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = \frac{y_1 F}{W} \end{cases}$$

En nuestro caso.
La ecuación lineal dada (6)
es:

$$x^2 y'' + x y' - y = x^2$$

escrita en forma canónica es así

$$y'' + \left(\frac{1}{x}\right) y' - \frac{1}{x^2} y = 1$$

En nuestro caso $y_1 = x$, $y_2 = \frac{1}{x}$; $F(x) = 1$

$$\begin{cases} C_1' x + C_2' \frac{1}{x} = 0 \\ C_1' \cdot 1 + C_2' \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases}$$

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow C_1 = \int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} x$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix}} = \frac{x}{-\frac{2}{x}} = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow C_2 = \int -\frac{x^2}{2} = -\frac{x^3}{6}$$

con lo cual la solución particular ⁽⁷⁾
de la completa es

$$y_p = C_1 y_1 + C_2 y_2 =$$

$$= \frac{1}{2} x \cdot x - \frac{x^3}{6} \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{6} x^2 =$$

$$= \frac{1}{3} x^2$$

Así pues la solución general de
la completa es

$$y = \underbrace{C_1 x + C_2 \frac{1}{x}}_{y_H} + \underbrace{\frac{1}{3} x^2}_{y_p}$$

Junio 2018

8

Considere las funciones

$$y_1 = e^{-x}; \quad y_2 = 2, \quad y_3 = 1 - e^{-x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

- a) Aplicando la definición, verifique si son o no linealmente independientes
- b) ¿Pueden formar las tres un sistema fundamental de soluciones de una ecuación diferencial lineal homogénea?
- c) Halle una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2, p.p. tenga a las tres como soluciones.
- d) Resuelva la ecuación no homogénea $L(y) = e^{-x}$ donde $L(y) = 0$ es la ecuación hallada en el apartado anterior.

a) $\{y_1 = e^{-x}, y_2 = 2, y_3 = 1 - e^{-x}\}$ es un conjunto linealmente dependiente ya que obviamente y_3 es combinación lineal de $\{y_1, y_2\}$. En efecto,

$$y_3 = \frac{1}{2} y_2 - y_1$$

b) Como $\{y_1, y_2, y_3\}$ no son linealmente independientes. no pueden formar un sistema fundamental de soluciones

c) Como $\{y_1 = e^{-x}, y_2 = 2\}$ forman un sistema linealmente independiente

El espacio $\langle y_1, y_2, y_3 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle$

$$= \langle e^{-x}, 1 \rangle = \langle e^{-x}, e^{0x} \rangle$$

Son raíces del polinomio característico

$$m_1 = -1, m_2 = 0$$

Por tanto, el polinomio característico es

$$p(m) = (m+1)(m-0) = m^2 + m$$

Luego la ecuación lineal homogénea es

$$y'' + y' = 0$$

Esto se podría haber hecho usando el Wronskiano

si una función y es de la forma

(10)

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

$$\Rightarrow W(y, y_1, y_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ y' & y_1' & y_2' \\ y'' & y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} = 0$$

En nuestro caso

$$\begin{vmatrix} y & e^{-x} & 1 \\ y' & -e^{-x} & 0 \\ y'' & e^{-x} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 \begin{vmatrix} y' & -e^{-x} \\ y'' & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} y' & -1 \\ y'' & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-x} (y' + y'') = 0 \quad \forall x$$

$$\Rightarrow y'' + y' = 0$$

La solución general de la homogénea es

$$y_H = c_1 + c_2 e^{-x}$$

d) Para buscar una solución particular de la completa

$$y'' + y' = e^{-x}$$

Vamos a utilizar el método de identificación de coeficientes

como el término forzado $F(x) = e^{-x}$ es una de las soluciones de la homogénea tenemos que ensayar

$$y_p = Ax e^{-x}$$

Calculamos las derivadas de y_p

$$y_p' = Ae^{-x} - A x e^{-x}$$

$$y_p'' = -Ae^{-x} - (Ae^{-x} - A x e^{-x})$$
$$= -2Ae^{-x} + A x e^{-x}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$-2Ae^{-x} + \cancel{A x e^{-x}} + Ae^{-x} - \cancel{A x e^{-x}} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow -A = 1 \Rightarrow A = -1$$

Por tanto

$$y_p = -x e^{-x}$$

luego la solución general es

$$y = \underbrace{-x e^{-x}}_{y_p} + \underbrace{c_1 + c_2 e^{-x}}_{y_H}$$

$y_p + y_H$

Dada la ecuación lineal

$$y''' - 3y'' + 4y = 8x$$

A) $\{e^{2x}, e^{-x}, xe^{-x}\}$ es un sistema fundamental de la homogénea asociada

B) La solución general de la homogénea asociada es

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$$

C) Admite una solución particular de la forma

$$y_p = b_1 x + b_2$$

$$b_1 \neq 0,$$

D) Ninguna de las anteriores

Se trata de una ecuación lineal de tercer orden con coeficientes constantes

1° Sol. general de la homogénea

13

Para hallar la solución general de la homogénea

$$y''' - 3y'' + 4y = 0$$

Resolvemos el polinomio característico

$$m^3 - 3m^2 + 4 = 0$$

tanteamos usando la regla de Ruffini

	1	-3	0	4
-1		-1	4	-4
<hr/>				
	1	-4	4	0
2		2	-4	
<hr/>				
	1	-2	0	
2		2		
<hr/>				
	1	0		

Las raíces del polinomio característico
 $m^3 - 3m^2 + 4 = (m+1)(m-2)^2 = 0$

Son $\left\{ \begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \text{ (doble)} \end{array} \right.$

Luego las soluciones fundamentales son $\{ e^{-x}, e^{2x}, x e^{2x} \}$

La solución general de la e. homogénea es

$$y_H = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

2.º Solución particular de la completa

(14)

(Hay varios métodos)

A) Método de los coeficientes indeterminados

Como el término forzado es de grado 1 y existe término en y , ensayamos un polinomio de grado uno

$$y_p = Ax + B$$

$$y_p' = A ; y_p'' = 0 ; y_p''' = 0$$

Sustituyendo en la ecuación original

$$0 - 3 \cdot 0 + 4(Ax + B) = 8x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4A = 8 \\ B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2$$

por tanto, una solución particular

$$\text{es } y_p = 2x$$

3.º La solución general de la completa

$$y = \underbrace{2x}_{y_p} + \underbrace{c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} + c_3 x e^{2x}}_{y_H}$$

NO ES RECOMENDABLE

B) Método de variación de las constantes

Para hallar la solución particular de la completa

$$\therefore H(D) y = F(x)$$

Se busca una solución particular de la forma

$$y_p = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^{2x} + c_3(x) x e^{2x}$$

con las condiciones

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = F(x) \end{cases}$$

Se aplica la regla de Cramer

(Hecho con WOLFRAM-ALPHA)

$$W(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{2x} & x e^{2x} \\ -e^{-x} & 2e^{2x} & e^{2x} + 2e^{2x} x \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 4e^{2x} + 4e^{2x} x \end{vmatrix}$$

$$= 9 e^{3x}$$

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{2x} x \\ 0 & 2e^{2x} & e^{2x} + 2e^{2x} x \\ 1 & 4e^{2x} & 4e^{2x} + 4e^{2x} x \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{e^{4x}}{9e^{3x}} =$$

$$C_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 & e^{2x} x \\ -e^{-x} & 0 & e^{2x} + 2e^{2x} x \\ e^{-x} & 1 & 4e^{2x} + 4e^{2x} x \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{-e^x (3x+1)}{9e^{3x}}$$

$$C_3' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ -e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^{-x} & 4e^{2x} & 1 \end{vmatrix} F(x)}{9e^{3x}} = \frac{e^{3x}}{9e^{3x}}$$

Integrado

$$C_1 = \int \frac{8e^x x}{9} dx = \frac{8}{9} e^x (x-1)$$

$$C_2 = \int -\frac{8}{9} e^{-2x} x(3x+1) dx = -\frac{8}{9} e^{-2x} \left(-\frac{3x^2}{2} - 2x - 1 \right)$$

$$C_3 = \int \frac{8}{3} e^{-2x} x dx = \frac{8}{3} e^{-2x} \left(-\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

Con lo cual

$$\begin{aligned}
y_p &= C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = \\
&= \frac{8(x-1)}{1} - \frac{8}{9} \left(\frac{-3x^2}{2} - 2x - 1 \right) + \frac{8}{3} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \right) \\
&= 2x
\end{aligned}$$

c) Método operacional

$$(D^3 - 3D^2 + 4)y = 8x$$

$$y_p = \frac{1}{(D^3 - 3D^2 + 4)} (8x) = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} D^2 + \dots \right) (8x) =$$

$$= 2x + 0 + \dots$$

$$= 2x$$

1	$4 - 3D^2 + D^3$
$-1 + \frac{3}{4}D^2 - \frac{1}{4}D^3$	$\frac{1}{4} + \frac{3}{16}D^2 \dots$
$\frac{3}{4}D^2 - \frac{1}{4}D^3$	
$-\frac{3}{4}D^2 \dots + \frac{9}{16}D^4 - \frac{3}{16}D^5$	

CORRECTA (C)

En la ecuación lineal no homogénea

$$H(D)y = 2e^x$$

donde $H(D)$ es el polinomio operacional

$$H(D) = D^2 + pD + 6$$

Se pide

a) Hallar el valor de p y la solución de la ecuación homogénea asociada, sabiendo que $r = \frac{1}{3}$ es una raíz de su ecuación característica.

b) Una solución particular de la ecuación completa, utilizando el método de variación de las constantes.

c) Solución general de la ecuación completa.

a) El polinomio característico es

19

$$P(r) = r^2 + pr + 6$$

Si $r=3$ es una raíz, $P(3) = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & p & 6 \\ 3 & & 3 & 3p+6 \\ \hline & 1 & p+3 & \boxed{3p+15} = P(3) \end{array}$$

$$3p+15=0 \Rightarrow p = -5$$

Con lo cual

$$P(r) = r^2 - 5r + 6 = (r-3)(r-2)$$

y las raíces son $\begin{cases} r=3 \\ r=2 \end{cases}$

La ecuación lineal homogénea

$$H(D)y = 0$$

$$y'' - 5y' + 6y = 0$$

tiene como solución general

$$\boxed{y_{OH} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}}$$

b) Para buscar una solución particular de la completa

20

$$y'' - 5y' + 6y = 2e^x$$

por el método de variación de las constantes ensayamos

$$y_p = c_1(x)e^{2x} + c_2(x)e^{3x}$$

con las condiciones

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = F(x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1' e^{2x} + c_2' e^{3x} = 0 \\ c_1' 2e^{2x} + c_2' 3e^{3x} = 2e^x \end{cases}$$

Resolvemos para c_1' y c_2' usando la regla de Cramer

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{3x} \\ 2e^x & 3e^{3x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{-2e^{4x}}{e^{5x}} = -2e^{-x}$$

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} e^{2x} & 0 \\ 2e^{2x} & 2e^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}} = \frac{2e^{3x}}{e^{5x}} = 2e^{-2x}$$

Integrando

$$C_1 = \int -2e^{-x} dx = 2e^{-x}$$

$$C_2 = \int 2e^{-2x} dx = -e^{-2x}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
y_{op} &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} = \\
&= 2e^{-x} \cdot e^{2x} + e^{-2x} e^{3x} = \\
&= 2e^x - e^x \\
&= e^x
\end{aligned}$$

Con lo cual la solución general de la ecuación es

$$y = \underbrace{C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}}_{y_H} + \underbrace{e^x}_{y_p}$$

Observación: la solución particular de la completa también se podría haber encontrado ensayando

$$y_p = Ae^x$$

① Aplíquese el teorema de existencia y unicidad para comprobar que el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} = \cos(x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$$

tiene solución única, y hállese la solución

Si se expresa la ecuación en la forma $y' = f(x, y)$ el teorema de existencia y unicidad dice que

$f(x_0, y_0)$ continua
 $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ es continua } \Rightarrow hay solución única en (x_0, y_0)

en nuestro caso $\begin{cases} y' = -\frac{y}{x} + \cos(x) \\ y(\pi) = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x, y) = -\frac{y}{x} + \cos(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

son funciones continuas, salvo para el valor $x=0$. Por tanto, en el punto $(\pi, 1)$ la solución existe y es única

Para resolver la ecuación

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = \cos(x)$$

observamos que es una ecuación lineal de 1^{er} orden.

1) Solución general de la homogénea

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$$

Es de variables separables

$$\frac{dy}{y} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln(y) = -\ln(x) + C$$

$$\ln(y) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

$$y = C \frac{1}{x}$$

Solución general de la homogénea

Buscamos una solución particular de la completa por el método de variación de las constantes.

Ensayamos

$$\begin{cases} y_p = C(x) \cdot \frac{1}{x} \\ y'_p = C' \frac{1}{x} - C \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación

$$C' \frac{1}{x} - C \frac{1}{x^2} + C \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} = \cos(x)$$

$$C' = x \cos(x)$$

integrando

$$C = \int x \cos(x) dx =$$

Por partes

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x) \end{cases}$$

$$= x \sin(x) - \int \sin(x) dx =$$

$$= x \sin(x) + \cos(x)$$

Integración por partes

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du$$

$$uv = \int u dv + \int v du$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Sustituyendo

$$y_p = [x \sin(x) + \cos(x)] \cdot \frac{1}{x} =$$

$$= \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$

Con lo que la solución general de la ecuación

$$y = \underbrace{\frac{C}{x}}_{y_H} + \underbrace{\sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}}_{y_p}$$

Para hallar la solución que cumple la condición inicial $y(\pi) = 1$ determinamos el valor de C

$$1 = \frac{C}{\pi} + \sin(\pi) + \frac{\cos(\pi)}{\pi}$$

$$1 = \frac{C}{\pi} + 0 + \frac{-1}{\pi} ; 1 = \frac{C-1}{\pi} ; \pi = C-1$$

$$C = \pi + 1$$

Por consiguiente, la solución del problema de Cauchy es

$$y = \frac{\pi+1}{x} + \sin(x) + \frac{\cos(x)}{x}$$