COMPLEMENTOS de MATEMÁTICAS

PROBLEMAS de CURVAS

allave@madrid.uned.es

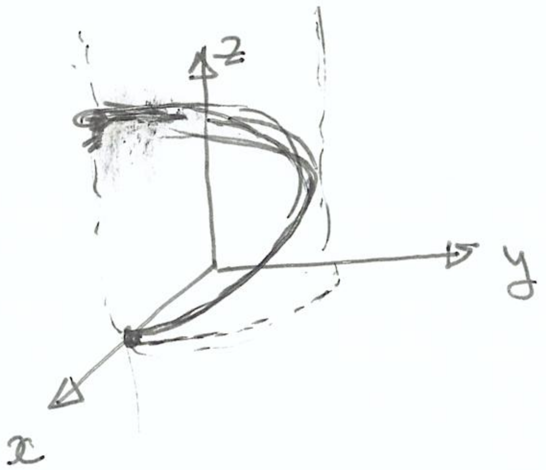
Junio 2018

Calcule la longitud de la porción de hélice para $t \in [0, 2\pi]$, dada por las ecuaciones

$$\vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

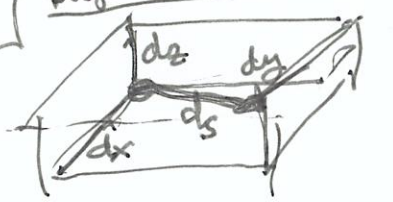
Respuesta

$$\vec{\alpha} : [0, 2\pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}$$



$$l_{ab} = \int_a^b ds = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$$

Diferencial de arco



$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2}$$

$$s = \sum \Delta s = \sum \frac{\Delta s}{\Delta t} \Delta t$$

$$s = \int ds = \int_a^b \|\vec{\alpha}'(t)\| dt$$

$$\|\vec{\alpha}'(t)\| \approx \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Teniendo en cuenta que

$$\vec{\alpha}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{[-\sin(t)]^2 + [\cos(t)]^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Resulta que

$$l = \int_0^{2\pi} \|\vec{\alpha}'(t)\| dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt =$$

$$= \sqrt{2}\, t \Big]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{2} - 0 = 2\sqrt{2}\pi$$

Junio 2018

Sea la curva dada por la ecuación

$$\vec{\alpha}(t) = \left(e^t, t^2+t, t+1\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determínese el vector normal a la curva en el punto $\vec{\alpha}(0)$

Recordatorio:

En una curva $\vec{\alpha}(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

El vector tangente es el vector unitario en la dirección de $\alpha'(t)$

$\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{\alpha}'(t)$

El vector normal es el vector unitario perpendicular a $\vec{t}$ y está en el plano $\langle \vec{\alpha}'(t), \vec{\alpha}''(t) \rangle$

$\vec{n}$ tiene la dirección de $\left[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\right] \times \vec{\alpha}'(t)$

El vector binormal es vector unitario perpendicular a $\vec{t}$ y $\vec{n}$

$\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)$

Calculamos

$$\vec{\alpha}'(t) = (e^t, 2t+1, 1)$$

$$\vec{\alpha}''(t) = (e^t, 2, 0)$$

En el punto $\vec{\alpha}(0) = (1, 0, 1)$

$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 1, 1)$$

$$\vec{\alpha}''(0) = (1, 2, 0)$$

El vector normal $\vec{n}$ es el vector unitario que lleva la dirección

$$\left[\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0)\right] \times \vec{\alpha}'(0) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (1, 1, 1) = (-2, 1, 1) \times (1, 1, 1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 3, -3)$$

Para hallar $\vec{n}$ normalizamos este vector

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+3^2}}(0,3,-3) = \frac{1}{3\sqrt{2}}(0,3,-3)$$

$$\boxed{\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)}$$

Junio 2018

Sea la curva de ecuaciones

$$\vec{x}(t) = (x, y, z)$$

donde

$$x = t^2 - t \ ; \ y = t^3 + t \ ; \ z = t - 1$$

para $t \in \mathbb{R}$

a) Determine la curvatura y la torsión en el punto $\vec{x}(0)$.

b) Determine el triedro de Frenet en el punto $\vec{x}(0)$.

c) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\vec{x}(0)$.

La curva es $\vec{x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

$$t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 - t \\ t^3 + t \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

calculamos las derivadas

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2t-1 \\ 3t^2+1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6t \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{x}'''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Consultando las fórmulas apropiadas

- La curvatura

$$K(0) = \frac{\| \vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) \|}{\| \vec{x}'(0) \|^3} = \frac{\| (0,2,-2) \|}{(\sqrt{3})^3} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} =$$

Hacemos

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-1,1,1) \times (2,0,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0,2,-2)$$

$$\| \vec{x}'(0) \| = \| (-1,1,1) \| = \sqrt{3}$$

Recordatorio:

$$\boxed{K(t) = \frac{\| \vec{x}'(t) \times x''(t) \|}{\| \vec{x}'(t) \|^3} \quad ; \quad \tau(t) = \frac{\det[\vec{x}'(t), x''(t), x'''(t)]}{\| x'(t) \times x''(t) \|^2}}$$

III La torsión

$$\tau(0) = \frac{\det[\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)]}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\|(0,2,-2)\|^2} = \frac{-12}{8} = -\frac{3}{2}$$

b) El triedro de Frenet $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ es un sistema de referencia local

$\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$
$\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$
$\vec{n}$ tiene la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times x'(t)$
$[\vec{n} = \vec{b} \times \vec{t}]$

II $\vec{t}$

$\vec{x}'(0) = (-1, 1, 1) \Rightarrow \vec{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

II $\vec{b}$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 2, -2)$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 2, -2) = \left(0\ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Comentario: $\vec{n}$ es el vector perpendicular a $\vec{t}$ en el plano $\langle \vec{x}', \vec{x}'' \rangle$

$\vec{n}$

$$[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) = (0,2,-2) \times (-1,1,1)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (4,2,2)$$

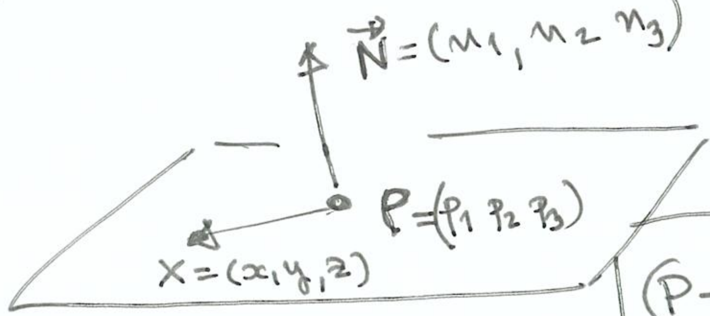
$$\vec{n} = \frac{1}{2\sqrt{6}}(4,2,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$$

Recordatorio

c) El plano osculador es perpendicular a $\vec{b}$
El plano normal es perpendicular a $\vec{t}$
El plano rectificador es perpendicular a $\vec{n}$

Recordatorio

La ecuación de un plano conocido un punto de apoyo $\underline{P} = (p_1, p_2, p_3)$ y vector ortogonal $\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$



$$\boxed{(P - X) \cdot \vec{N} = 0}$$

$$\boxed{n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0}$$

Plano osculador $(\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle)$ $(\perp \vec{b})$

$$0(x-0) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0$$

$$y - z - 1 = 0$$

Plano normal $(\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle)$ $(\perp \vec{t})$

$$-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1)$$

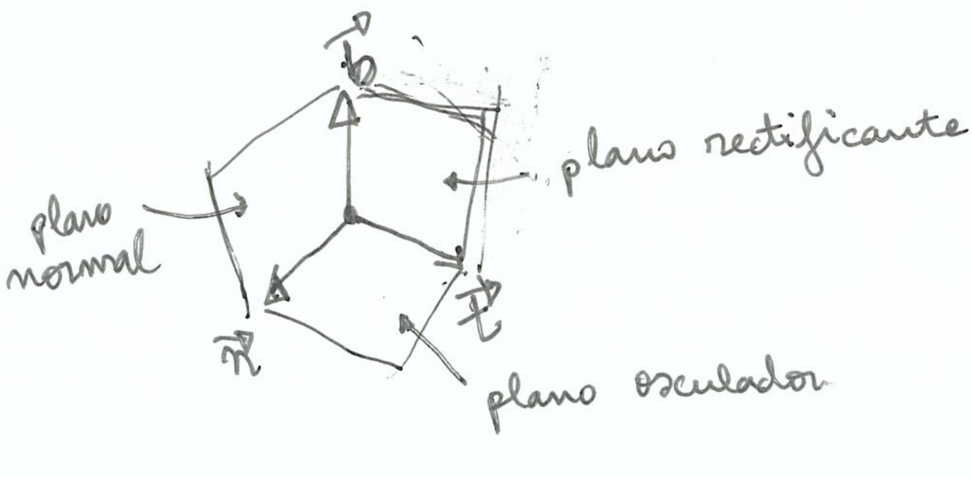
$$-x + y + z + 1 = 0$$

$$x - y - z - 1 = 0$$

Plano rectificante $(\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle)$ $(\perp \vec{n})$

$$2(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1) = 0$$

$$2x + y + z + 1 = 0$$



Septiembre 2018

Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3+2t, t^2-t, t^2-1)$$

para $t \in [-2, 2]$

a) Estudie si es una curva regular y si $\vec{x}(0)$ es un punto múltiple.

b) Determine la torsión de $\mathcal{C}$ en $\vec{x}(0)$.

c) Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\vec{x}(0)$

d) Calcule la ecuación del plano osculador que pasa por $\vec{x}(0)$.

Recordatorio

a) Definición: $\vec{x}(t)$ es un punto regular sii

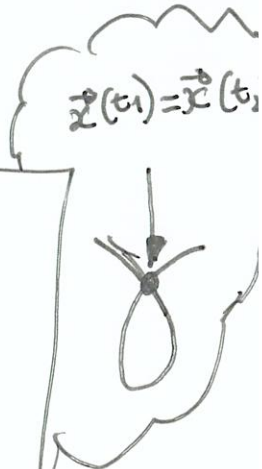
$$\vec{x}'(t) = \left(\frac{\partial x}{\partial t}(t), \frac{\partial y}{\partial t}(t), \frac{\partial z}{\partial t}(t)\right) \neq (0,0,0)$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2+2 \\ 2t-1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Un punto es singular si $\begin{cases} 3t^2+2=0 \\ 2t-1=0 \\ 2t=0 \end{cases}$

Def: $\vec{x}(t)$ es punto singular o "estacionario" sii $\vec{x}'(t) = \vec{0}$

Como estas tres ecuaciones no se pueden dar simultáneamente para ningún t. resulta que la curva es regular $\forall t \in [-2,2]$



Recordatorio:

> Un punto $\vec{x}(t_1)$ es múltiple si
> $$\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2)$$
> para dos o más valores de $t \in I$

¿ $\vec{x}(0)=(0,0,-1)$ es múltiple?

¿ $\vec{x}(t)=(0,0,-1)$ para algún otro $t\neq 0$?

Buscamos las posibles soluciones de

$$\begin{cases} t^3+2t = 0 \\ t^2-t = 0 \\ t^2-1 = -1 \end{cases}$$

Empezamos por la tercera condición

$$t^2-1=-1 \Rightarrow t^2=0,$$ sólo se verifica cuando $t=0$

Por tanto, $\vec{x}(0)$ <u>NO</u> es un punto múltiple

b) Recordatorio

Torsión

$$\boxed{\tau(t) = \frac{\det\left(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)\right)}{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|^2}}$$

Explicación significado geométrico de la torsión

La torsión es una medida del cambio de dirección del vector binormal; cuanto más rápido cambia, más rápido gira el vector binormal alrededor del vector tangente y más retorcida aparece la curva. Para una curva plana, la torsión es nula, ya que el vector binormal es constantemente perpendicular al plano que la contiene.

Hacemos

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2+2 \\ 2t-1 \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'''(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'''(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-2, -4, 4)$$

$$\det\left(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)\right) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

De modo que

$$\tau(0) = \frac{\det\left(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)\right)}{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|^2} = \frac{-12}{\|(-2,-4,4)\|^2} =$$

$$= \frac{-12}{4+16+16} = -\frac{12}{36} = -\frac{1}{3}$$

c) Recordatorio

$\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{x}'$
$\vec{n}$ tiene la dirección de $\left[\vec{x}' \times \vec{x}''\right] \times \vec{x}'$
$\vec{b}$ tiene la dirección de $\left(\vec{x}' \times \vec{x}''\right)$

$\vec{t}(0)$ lleva la dirección de $\vec{x}'(0) = (-2, -1, 0)$

La recta tangente en $\vec{x}(0) = (0, 0, -1)$ es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Ec. paramétrica de la recta}} \iff \underbrace{\frac{x-0}{-2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{0}}_{\text{Ecuación continua de la recta}}$$

$\vec{n}(0)$ lleva la dirección de

$$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) =$$

$$= (-2,-4,4) \times (2,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4,8,10) = 2(2,4,5)$$

La recta normal que $\vec{x}(0) = (0,0,-1)$ es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{Ec. paramétrica}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{4} = \frac{z+1}{5}}_{\text{Ec. continua}}$$

d) El plano osculador es el plano contiene a $\vec{t}$ y $\vec{n}$ y es perpendicular a $\vec{b}$

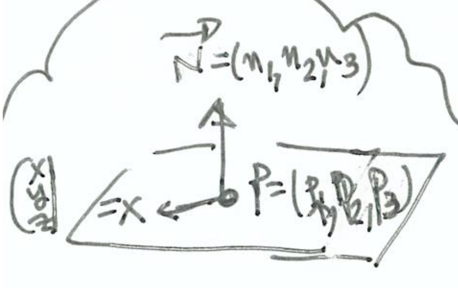
El vector $\vec{b}(0)$ lleva la dirección de

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-2,-4,4) = 2(-1,-2,2)$$

La ecuación del plano normal

$$-1(x-0) - 2(y-0) + 2(z+1) = 0$$

$$\boxed{-x - 2y + 2z + 2 = 0}$$



$$n_1(x-p_1) + n_2(y-p_2) + n_3(z-p_3) = 0$$

Junio 2019

Sea la curva $\mathcal{C}$ dada por

$$\vec{x}(t) = \left(t^3 - t \, , \cos(\pi t), t^2 - 1\right)$$

para $t = [-2, 2]$

a) Estudie si la curva es regular y si $(0, -1, 0)$ es un punto múltiple de la curva.

b) Determine la curvatura en $\vec{x}(0)$

c) Determine la torsión de $\mathcal{C}$ en $\vec{x}(0)$

d) Determine el triedro de Frenet en $\vec{x}(0)$

a) Estudiamos

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ -\pi \sin(\pi t) \\ 2t \end{pmatrix}$$

Son puntos singulares de la curva $\mathcal{C}$ aquellos para los que $\vec{x}'(t) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 0 \\ -\pi \sin(\pi t) = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación sólamente se verifica cuando $t=0$.

Pero, para $t=0$ no se verifica la primera.

Por tanto, la curva es regular para $t \in [-2,2]$

¿Es $(0,-1,0)$ un punto múltiple?

¿ $\vec{x}(t_1)=\vec{x}(t_2) = (0,-1,0)$?

¿ El sitema

$$\begin{cases} t^3-t=0 \\ \cos(\pi t) = -1 \\ t^2-1=0 \end{cases}$$

tiene más de una solución ?

De la tercera ecuación $t^2=1$, deducimos que puede haber dos posibles soluciones $t=1$ y $t=-1$. Comprobamos si se verifican para las otras dos ecuaciones

$$\cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1$$

$$1^3-1 = (-1)^3-(-1) = 0$$

En consecuencia,

$$\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = (0,-1,0)$$

por tanto $(0,-1,0)$ es un punto múltiple

b) La curvatura de una curva alabeada es una medida del cambio de dirección del vector $\vec{t}$ tangente a la curva. Cuanto más rápido cambia este a medida que nos desplazamos a lo largo de la curva, se dice que es más grande la curvatura $\chi(t) = \left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|$, en cualquier parametrización:

$$\chi(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3t^2-1 \\ -\pi\sin(\pi t) \\ 2t \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}'(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ -\pi^2\cos(\pi t) \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{x}''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \end{vmatrix} = (0, 2, \pi^2)$$

$$\chi(0) = \frac{\| x'(0) \times x''(0) \|}{\| x'(0) \|^3} = \frac{\sqrt{\pi^4+4}}{1} = \sqrt{\pi^4+4}$$

c) La torsión de una curva en paramétricas

$$\tau(t) = \frac{\det\left(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)\right)}{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|^2}$$

$$\tau(0) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{4+\pi^4}} = \frac{0}{\sqrt{4+\pi^4}} = 0$$

Recordatorio

d) El triedro de Frenet $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$

Propiedades del triedro de Frenet

$$\begin{cases} \vec{t}^2 = \vec{n}^2 = \vec{b}^2 = 1 \quad \text{(son vectores unitarios)} \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{t} = \vec{t} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{(ortogonales)} \\ \vec{t} = \vec{n} \times \vec{b} \ ; \ \vec{n} = \vec{b} \times \vec{t} \ ; \ \vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \\ \det(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}) = 1 \quad \text{(orientados positivamente)} \end{cases}$$

Es una referencia local.

Derivando respecto al arco

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

Ecuaciones diferenciales que permiten reconstruir la curva conocidas la curvatura, la torsión y una posición inicial

$\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$

$\vec{n}$ tiene la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$

$\vec{b}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$

- $\vec{t}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(0) = (-1, 0, 0)$

como es unitario

$$\vec{t} = (-1, 0, 0)$$

- $\vec{n}$ tiene la dirección de

$$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) =$$

$$= [(-1,0,0) \times (0, -\pi^2, 2)] \times (-1, 0, 0) =$$

$$= (0, 2, \pi^2) \times (-1, 0, 0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & \pi^2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, -\pi^2, 2)$$

Para hallar $\vec{n}$ normalizamos este vector

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}} (0, -\pi^2, 2)$$

- $\vec{b}$ tiene la dirección

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (0, 2, \pi^2)$$

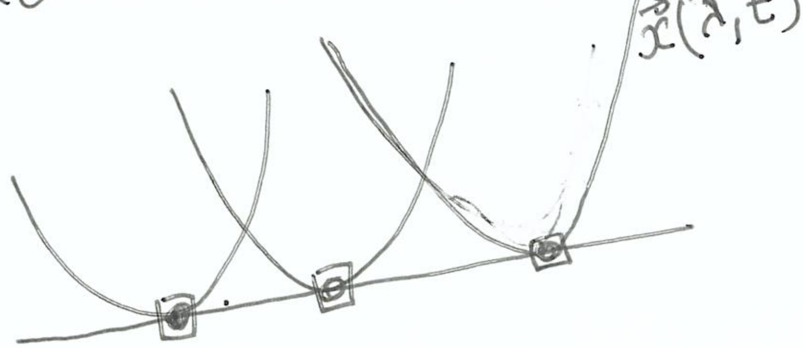
normalizando, para hacerlo unitario

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{4+\pi^4}} (0, 2, \pi^2)$$

Junio 2019

Sea $\left\{ \vec{x}(\lambda, t) \right\}_{\lambda \in [a,b]}$ una familia de curvas planas regulares. Defina su "envolvente".

~~Se~~ dice que una curva es <u>envolvente</u> de una familia de curvas cuando en cada punto es tangente a alguna de las curvas de la familia y en ese punto común la recta tangente de ambas curvas coinciden



La condición analítica es

$$\det\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \lambda}, \frac{\partial \vec{x}}{\partial t}\right) = 0$$

Es decir

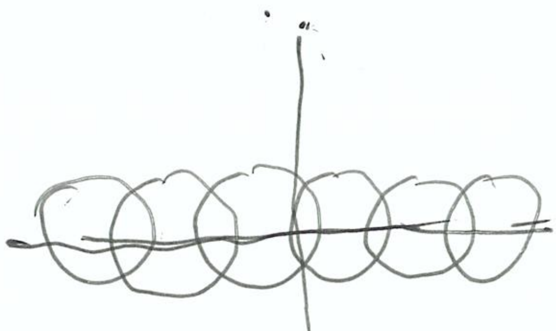
$$\begin{cases} x = x(t,\lambda) \\ y = y(t,\lambda) \\ \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

Si la familia de curvas está dada en forma implícita, la envolvente es la solución del

$$\begin{cases} \Phi(x,y,\lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Ejemplo: circunferencia de centro $(\lambda, 0)$ y radio 1

$$\gamma_\lambda \equiv \underbrace{\begin{cases} x = \lambda + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases}}$$



forma paramétrica $\vec{x}(\lambda,t) = (\lambda + \cos t, \sin(t))$

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} \end{pmatrix} = 0$$

Envolvente

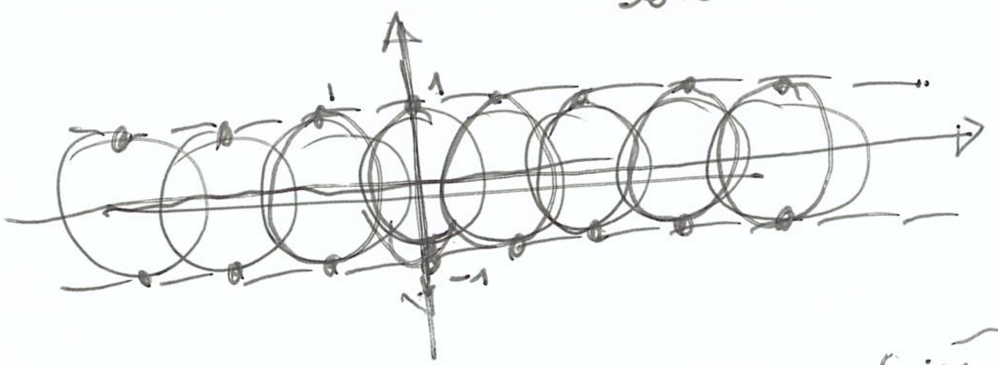
$$\begin{cases} x = \lambda + \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial t} = -\sin(t);\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} = 1 \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \cos(t);\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$$

Envolvente

$$\det\begin{pmatrix} -\sin(t) & 1 \\ \cos(t) & 0 \end{pmatrix} = -\cos(t) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda + \overbrace{\cos(t)}^{=0} \\ y = \pm\sqrt{1 - \underbrace{\cos^2(t)}_{=0}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

Son dos rectas



En implícitas

circunferencias de radio 1 y centro $(\lambda, 0)$

envolvente

$$\Phi(x,y,\lambda) \equiv (x-\lambda)^2 + y^2 = 1$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = -2(x-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overbrace{(x-\lambda)^2}^{=0} + y^2 = 1 \\ (x-\lambda) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \{ y^2 = 1 \Rightarrow \} y = \pm 1$$

dos rectas
$y = 1$
$y = -1$

Junio 2019

Determínese el vector tangente y la recta tangente en $\vec{x}(0)$ a la curva de ecuaciones paramétricas

$$\vec{x}(t) = (t^2, e^t, t+t^3)$$

El vector

$$\vec{x}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \\ 1+3t^2 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}\,'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El vector tangente $\vec{t}$ es el vector unitario en la dirección $\vec{x}\,'$

$$\vec{t}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1)$$

La recta tangente pasa por $\vec{x}(0) = (0, 1, 0)$ con dirección $\vec{x}\,'(0) = (0, 1, 1)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Ec. paramétrica}} \Leftrightarrow \underbrace{\frac{x-0}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-0}{1}}_{\text{Ec. continua}}$$

Junio 2019

Demuéstrese que la curvatura de una recta es 0

La ecuación de una recta referida a la longitud de arco es

$$\vec{x} = \vec{p} + s\,\vec{v}$$

vector de dirección unitario

a punto de apoyo

$$\dot{\vec{x}}(s) = \frac{d\vec{x}}{ds} = \vec{v} \qquad \text{como } \|\vec{v}\| = 1$$

$\vec{v}$ es un vector constante unitario

$$\vec{t}(s) = \vec{v}$$

La definición de curvatura.

$$\kappa(s) = \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = 0$$

De otra manera usando la fórmula

$$\kappa = \frac{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|}{\| \vec{x}'(t) \|^3}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} p_1 + t v_1 \\ p_2 + t v_2 \\ p_3 + t v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}''(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\kappa(t) = \frac{0}{\| \vec{v} \|^3} = 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Junio 2019}}$

Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por

$$\vec{x}(t) = \left(t^2-1,\ t^3-t,\ \sin(2\pi t)\right)$$

para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Se pide estudiar si $(0,0,0)$ es un punto múltiple.

$$¿\ \vec{x}(t_1) = \begin{pmatrix} t_1^2-1 \\ t_1^3-t \\ \sin(2\pi t_1) \end{pmatrix} = \vec{x}(t_2) = \begin{pmatrix} t_2^2-1 \\ t_2^3-t \\ \sin(2\pi t_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}?$$

Vamos a estudiar si

$$\begin{cases} t^2-1 = 0 \\ t^3-t = 0 \\ \sin(2\pi t) = 0 \end{cases}$$

tiene varias soluciones en $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

De la primera ecuación

$$t^2 = 1 \Rightarrow t = 1 \text{ ó } t = -1$$

Comprobamos que ambos valores satisfacen también las otras dos ecuaciones. Por tanto,

$$\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por eso, $(0,0,0)$ es un punto múltiple

Comprobamos que estos valores de t están en el rango de definición

$$1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$-1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Junio 2022

3 Estudie si la curva C dada por la expresión

$$\vec{x}(t) = (t^5 - t^3 - t,\ \cos t,\ t^3 + t)$$

para $t \in \mathbb{R}$, tiene todos sus puntos regulares.

Que los puntos sean regulares significa que $\vec{x}'(t) \neq (0,0,0)$

$$\vec{x}'(t) = (5t^4 - 3t^2,\ -\sin(t),\ 3t^2+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5t^4 - 3t^2 = 0 \Rightarrow t^2(5t^2-3) = 0 \Rightarrow t=0,\ t = \pm\sqrt{3/5} \\ -\sin(t) = 0 \Rightarrow t = k\pi \\ 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{1/3} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

No hay ningún valor de t que anule simultáneamente las tres componentes de $\vec{x}'(t)$. Por consiguiente, todos sus puntos son regulares

Junio 2022

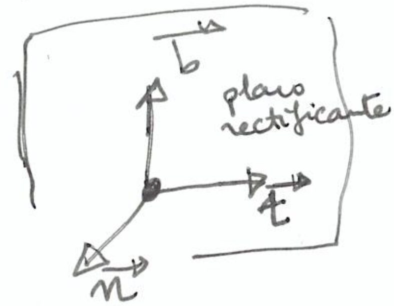
4. Sea C la curva regular dada para $t \in \mathbb{R}$ por la parametrización

$$\vec{x}(t) = (t^5 - t^3 - t,\ \cos(t),\ t^3 + t)$$

Determine el plano rectificante en el punto $\vec{x}(0)$

Recordatorio:

☆ El plano rectificante es el plano que es normal al vector $\vec{n}$



☆ El vector $\vec{n}$ es el vector unitario en la dirección de

$$[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$$

En nuestro caso

$$\vec{x}'(t) = (5t^4 - 3t^2 - 1,\ -\operatorname{sen}(t),\ 3t^2 + 1) \rightarrow \vec{x}'(0) = (-1, 0, 1)$$

$$x''(t) = (20t^3 - 6t,\ -\cos(t),\ 6t) \rightarrow x''(0) = (0, -1, 0)$$

La dirección del vector normal [que es la dirección ortogonal del plano rectificante]

$$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \times (-1, 0, 1) =$$

$$= (1, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -2, 0)$$

El plano pedido, es el que se apoya en el pto $\vec{x}(0) = (0, 1, 0)$ con vector ortogonal $(0, -1, 0)$

$$0\,(x - 0) + (-1)(y - 1) + 0\,(z - 0) = 0$$

$$\boxed{y - 1 = 0}$$