ECUACIONES DIFERENCIALES

TRASFORMADA de LAPLACE

(capítulo 5)

allave@madrid.uned.es

Motivación

Consideremos el oscilador armónico con un término forzado

$$y'' + k y = F(t)$$

¿Qué pasa cuando $F(t)$ es una función discontinua? Caso frecuente en los circuitos eléctricos

La transformada de Laplace es una transformación integral (*) entre espacios funcionales

$$\mathcal{L} : \mathcal{F} \longrightarrow G$$
$$f \longmapsto \mathcal{L}(f) = F$$

(La transformada de Laplace de una función, f, se suele representar con la letra en mayúsculas, F.

Definición

$$\boxed{\mathcal{L}\left[f(x)\right] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx}$$

(*) Transformaciones integrales $T[f(x)] = \int \underbrace{K(s;x)}_{\text{Núcleo}} f(x)\, dx = F(s)$

(comentar: función de Green)

Comentarios:

- $\mathcal{L}$ actúa sobre un conjunto muy amplio de funciones $f(x)$, para $x>0$, (Discontinuas, definidas a trozos, ...)

Una condición suficiente para que una función f tenga transformada de Laplace es que

a) f sea continua a trozos y

b) $|f(x)| < M e^{ct}$, $M>0$ y $c>0$

(menos de crecimiento exponencial)

- $\mathcal{L}$ "suaviza" y "plancha" las funciones

$F(s)$ es suave y $F(s) \to 0$

- $\mathcal{L}$ es un operador lineal

$$\mathcal{L}[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 \mathcal{L}[f_1] + c_2 \mathcal{L}[f_2]$$

- $\mathcal{L}^{-1}$ también es un operador lineal

- $\mathcal{L}$ transforma las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Ejemplos de transformadas de Laplace de algunas funciones definidas para $x>0$

① $\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-sx} \cdot 1\, dx = \lim_{A\to\infty} \left. \frac{-e^{-sx}}{s} \right]_0^A = \frac{1}{s}$

$s>0$

② $\mathcal{L}[e^{ax}] = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} dx = \int_0^\infty e^{-(s-a)} dx =$

$= \frac{1}{s-a}$ $\quad s>a$

③ $\mathcal{L}[\sin(ax)] = \int_0^\infty e^{-sx} \sin(ax)\, dx =$

Por partes
$u = e^{-st} \rightarrow du = -s e^{-st}$
$dv = \sin(ax)dx \rightarrow v = -\frac{1}{a}\cos(at)$

$= -\left. \frac{e^{-sx}\cos(ax)}{a} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{s}{a} e^{-st} \cos(ax)\, dx =$

$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a} \int_0^\infty e^{-sx} \cos(ax)\, dx$ $\Rightarrow$ una nueva integración por partes

$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} \int_0^\infty e^{-sx} \sin(ax)\, dx = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2} F(s)$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{s^2}{a^2}\right)F(s) = \frac{1}{a} \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Es decir

$$\mathcal{L}\left[\sin(ax)\right] = \frac{a}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

De manera semejante

$$\mathcal{L}\left[\cos(ax)\right] = \frac{s}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

Transformada de una integral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x f(t)\,dt\right] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{integrando} \\ \text{por partes}}}{=} \frac{\mathcal{L}[f(x)]}{s} = \frac{F(s)}{s}$$

Propiedad de traslación

$$\mathcal{L}\left[e^{ax} f(x)\right] = F(s-a)$$

En efecto

$$\mathcal{L}\left[e^{ax} f(x)\right] = \int_0^{\infty} e^{-sx} e^{ax} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(a-s)x} f(x)\, dx = F(a-s)$$

Ejemplo 1

$$\mathcal{L}\left[e^{5x} \sin(2x)\right] = \mathcal{L}\left[e^{5x} f(x)\right] = F(s-5)$$

$f(x) = \sin(2x)$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$= \frac{2}{(s-5)^2+4}$$

Ejemplo 2

$$\mathcal{L}\left[e^{ax} \cos(bx)\right] = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}\left[e^{ax} \sin(bx)\right] = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

Otras transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\left[x^n\right] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

En particular

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad \mathcal{L}\left[x^2\right] = \frac{2}{s^3}$$

Transformada de derivadas

$$\mathcal{L}\left[f'(x)\right] = \int_0^\infty e^{-sx} f'(x)\,dx =$$

Integrando por partes

$u = e^{-sx} \to du = -s\,e^{-sx}dx$

$dv = f'(x)\,dt \to v = f(x)$

$$= e^{-sx} f(x)\Big]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx =$$

$$= -f(0) + s\,\mathcal{L}\left[f(x)\right] = s\,F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f''(x)\right] = s\,\mathcal{L}[f'] - f'(0) =$$

$$= s\left[s\,\mathcal{L}(f) - f(0)\right] - f'(0) =$$

$$= s^2\,\mathcal{L}(f) - s\,f(0) - f'(0)$$

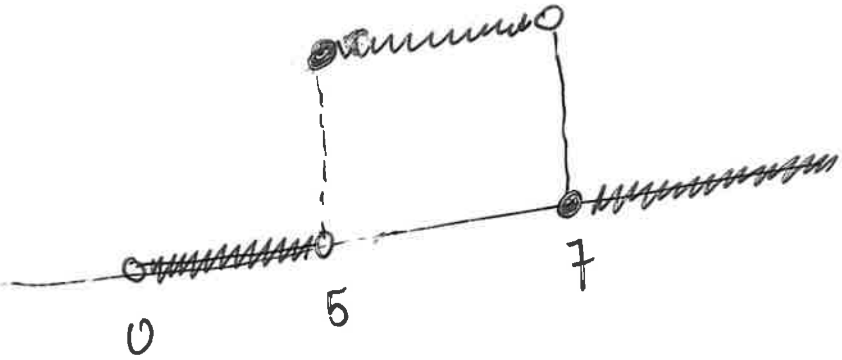
$$= s^2 F(s) - s\,f(0) - f'(0)$$

$$\mathcal{L}\left[f'''(x)\right] = s^3 F(s) - s^2 f(0) - s^2 f'(0) - f''(0)$$

Comentario: Una de las características notables de la transformada de Laplace es que incorpora las condiciones iniciales del problema de Cauchy a la resolución de una ecuación diferencial

Ejemplo Hallar la Transformada de Laplace de la función discontinua definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 < x < 5 \\ 2 & \text{si} \quad 5 \leq x < 7 \\ 0 & \text{si} \quad x \geq 7 \end{cases}$$



Respuesta

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx =$$

$$= \int_0^5 e^{-sx} \cancel{0}\,dx + \int_5^7 e^{-sx} \cdot 2\,dx + \int_7^\infty e^{-sx} \cancel{0}\,dx =$$

$$\swarrow 0 \qquad\qquad \swarrow 0$$

$$= 2\int_5^7 e^{-sx}\,dx = -\frac{2}{s} e^{-sx}\Big]_5^7 =$$

$$= \frac{2}{s}\left[e^{-5s} - e^{-7s}\right]$$

Transformada de un producto por x^n

$$\mathcal{L}[x\, f(x)] = -\frac{d}{ds} F(s)$$

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{x} f(x)\right] = \int_s^\infty F(s)\,ds$$

Problema Resolver, usando la Transformada de Laplace el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \sin(2x) \\ y(0) = 2 \ ; \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Es un oscilador armónico forzado

Se aplica la Transformada de Laplace a los dos miembros

$$\mathcal{L}[y''+y] = \mathcal{L}[\sin(2x)]$$

$$\mathcal{L}[y''] + \mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[\sin(2x)]$$

(Mirar tablas) $\rightarrow$

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[y'] = sY - y_0$$

$$\mathcal{L}[y''] = s^2Y - sy_0 - y_0'$$

$$\underbrace{s^2Y - 2s - 1}_{\mathcal{L}[y'']} + \underbrace{Y}_{\mathcal{L}[y]} = \underbrace{\frac{2}{s^2+4}}_{\mathcal{L}[\sin(2x)]}$$

$$(s^2+1)\,Y = \frac{2}{s^2+4} + 2s + 1$$

$$Y = \left(\frac{2}{s^2+4} + 2s + 1\right) \cdot \frac{1}{s^2+1} =$$

$$= \frac{2 + 2s^3 + 8s + s^2 + 4}{s^2+4} \cdot \frac{1}{s^2+1} =$$

$$= \frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+4)(s^2+1)} \underset{(*)}{=} \frac{-2/3}{s^2+4} + \frac{2s + 5/3}{s^2+1} =$$

$$= \frac{-2/3}{s^2+4} + \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1}$$

$(*)$ $$\frac{2s^3 + s^2 + 8s + 6}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{(As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)} = \star$$

$$= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + (A+4C)s + (B+4D)}{(s^2+4)(s^2+1)} =$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=2 \\ B+D=1 \\ A+4C=8 \\ B+4D=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=0;\ B=-2/3 \\ C=2;\ D=5/3 \end{cases}$$

$$\star = \frac{-2/3}{s^2+4} + \frac{2s+5/3}{s^2+1}$$

Para halla y, aplicamos $\mathcal{L}^{-1}$ a los dos miembros y utilizamos la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2/3}{s^2+4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/3}{s^2+1}\right) =$$

Recordando que

$$\mathcal{L}[\sin(ax)] = \frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(ax)] = \frac{s}{s^2+a^2}$$

Se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-2/3}{s^2+4}\right) = -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+4}\right] = -\frac{1}{3}\sin(2x)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{s^2+1}\right) = 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = 2\cos(x)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5/3}{s^2+1}\right) = \frac{5}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1^2}\right) = \frac{5}{3}\sin(x)$$

Con lo cual resulta

$$y = -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{5}{3}\sin(x) + 2\cos(x)$$

Comentario:

La ecuación lineal

$$y'' + y = \sin(2x)$$

también se puede resolver teniendo en cuenta que es una ecuación lineal de coeficientes constantes.

La ecuación homogénea

$$y'' + y = 0$$

tiene como polinomio característico

$$m^2 + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = i \\ m_2 = -i \end{cases}$$

Por lo que

$$y_H = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x)$$

Una solución particular la completa

ensayamos

$$y_p = A\sin(2x) + B\cos(2x)$$

$$y_p' = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$

$$y''_p = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Sustituyendo en la ecuación

$$-4A \sin(2x) - 4B\cos(2x) + A\sin(2x) + B\cos(2x) = \sin(2x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4A + A = 1 \Rightarrow A = -1/3 \\ -4B + B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_p = -1/3 \sin(2x)$$

La solución general de la ecuación completa es

$$y = \underbrace{-\frac{1}{3}\sin(2x)}_{y_p} + \underbrace{c_1 \sin(x) + c_2\cos(x)}_{y_H}$$

$$y' = -\frac{2}{3}\cos(2x) + c_1 \cos(x) + c_2 \cos(x)$$

Determinamos c_1 y c_2 con las condiciones iniciales

$$y(0) = 2 = c_2 \quad ; \quad y'(0) = -\frac{2}{3} + c_1 = 1$$

$$\Rightarrow c_1 = 1 + \frac{2}{3} = 5/3$$

Así pues, la solución del problema de Cauchy es

$$y = -\frac{1}{3}\sin(2x) + \frac{5}{3}\sin(x) + 2\cos(x)$$

14-1

```
(%i2) ec:'diff(y,x,2)+y=sin(2·x);
```

(%o2) $$\frac{d^2}{d\,x^2}y+y=\sin(2\,x)$$

```
(%i4) sol:ode2(ec,y,x);
```

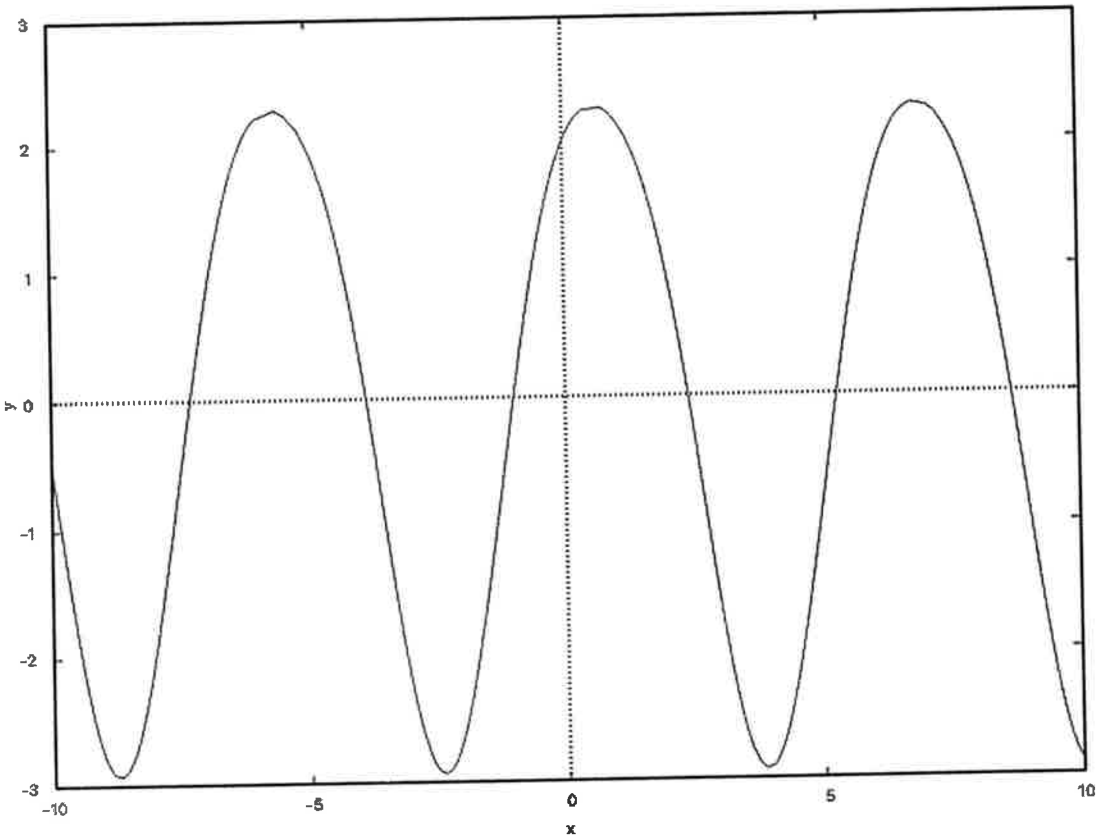
(%o4) $$y=-\frac{\sin(2\,x)}{3}+\%k1\,\sin(x)+\%k2\,\cos(x)$$

```
(%i12) solprobcauchy:ic2(sol,x=0,y=2,'diff(y,x)=1);
```

(%o12) $$y=-\frac{\sin(2\,x)}{3}+\frac{5\,\sin(x)}{3}+2\,\cos(x)$$

```
(%i20) plot2d([solprobcauchy], [x,-10,10], [y,-3,3],
 [plot_format, gnuplot],
 [gnuplot_postamble, "set zeroaxis;"])$
```

14-2



(%i23) `laplace(sin(2·x),x,s);`

(%o23) $\frac{2}{s^2+4}$

(%i27) `partfrac((2/(s^2+4)+2·s+1)·(1/(s^2+1)),s);`

(%o27) $\frac{6\,s+5}{3\,(s^2+1)} - \frac{2}{3\,(s^2+4)}$

(%i32) `ilt((6·s+5)/(3·(s^2+1))-2/(3·(s^2+4)),s,x);`

(%o32) $-\frac{\sin(2\,x)}{3}+\frac{5\sin(x)}{3}+2\cos(x)$

14-3

WolframAlpha

$\mathcal{L}_x[\sin(2x)](s)$

LENGUAJE NATURAL

ENTRADA MATEMÁTICA

Entrada

$\mathcal{L}_x[\operatorname{sen}(2x)](s)$

$\mathcal{L}_t[f(t)](s)$ es la transformada de

Resultado

$$\frac{2}{s^2+4}$$

Representaciones gráficas

(14-4)

$$\mathcal{L}_x\left[\frac{d^2}{dx^2}y+y\right](s)$$

LENGUAJE NATURAL

ENTRADA MATEMÁTICA

Interpretación de la entrada

$$\mathcal{L}_x\left[y''(x)+y\right](s)$$

Resultado

$$s^2\left(\mathcal{L}_x[y(x)](s)\right)-s\,y(0)+\frac{y}{s}-y'(0)$$

14-5

$$\mathcal{L}^{-1}{}_s\left[\frac{(2+2s^3+8s+s^2+4)}{(s^2+4)(s^2+1)}\right](x)$$

LENGUAJE NATURAL

ENTRADA MATEMÁTICA

Entrada

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{2+2s^3+8s+s^2+4}{(s^2+4)(s^2+1)}\right](x)$$

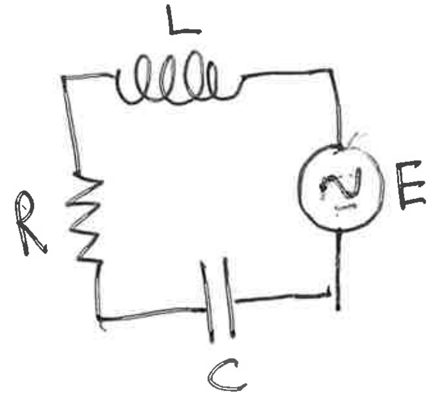
Resultado

$$\frac{1}{3}(5\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(2x)+6\cos(x))$$

Representaciones gráficas

Comentario

La transformada de Laplace es útil para estudiar circuitos oscilantes para tensiones discontinuas



$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{1}{C}q=E$$

Para calcular $\mathcal{L}^{-1}$ (transformada de Laplace inversa) es útil el Teorema de convolución

Definición CONVOLUCIÓN de dos funciones

$$\boxed{f*g(x)=\int_0^x f(x-\nu)\,g(\nu)\,d\nu}$$

Ejemplo $f(x)=x$; $g(x)=x^2$

$$f*g(x)=\int_0^x (x-\nu)\,\nu^2\,d\nu=\int_0^x x\,\nu^2 d\nu-\int_0^x \nu^3 d\nu=$$

$$=x\frac{\nu^3}{3}\Big]_0^x-\frac{\nu^4}{4}\Big]_0^x=\frac{x^4}{3}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{12}$$

Propiedades de la convolución

a) $f*g = g*f$ (conmutativa)

b) $f*(g+h) = (f*g) + (f*h)$ (distributiva)

c) $(f*g)*h = f*(g*h)$ (asociativa)

Teorema de convolución (ver pag 146)

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\cdot G(s)\right] = f*g(x)}$$

siendo $F = \mathcal{L}[f]$; $G = \mathcal{L}(g)$

Dicho de otra manera

$$\mathcal{L}\left[f*g(x)\right] = F(s)\,G(s)$$

Problema

Calcular $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right]$

Como sabemos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+2^2}\right) = \frac{1}{2}\sin(2x)$$

Aplicando el teorema de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right] = [1] * \left[\frac{1}{2}\sin(2x)\right] =$$

$$= \int_0^x 1\cdot\frac{1}{2}\sin(2v)\,dv = \int_0^{x}\frac{1}{2}\sin(2v)\,dx =$$

La aplicación que es constantemente 1 aplicada al valor $(x-v)$ es 1

$$1(x-v) = 1$$

función que siempre vale 1

$$= -\frac{1}{4}\cos(2v)\Big]_0^x = -\frac{1}{4}\cos(2x) + \frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\cos(2x)\right)$$

PEC 2018

Utilizando la convolución, hállese la transformada inversa de Laplace de la función

$$F(s) = \frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}$$

Se puede hacer directamente, descomponiendo $F(s)$ en fracciones elementales

$$\frac{2s-1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+1} =$$

$$= \frac{As(s^2+1) + B(s^2+1) + (Cs+D)s^2}{s^2(s^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)s^3 + (B+D)s^2 + As + B}{s^2(s^2+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ B+D=0 \\ A=2 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-1 \\ C=-2 \\ D=1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(bx)] = \frac{b}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos(bx)] = \frac{s}{s^2+b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} - \frac{2s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right] = \boxed{2 - x - 2\cos(x) + \sin(x)}$$

Usando el teorema de convolución (19)

se haría así

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{s^2}}_{F} \cdot \underbrace{\frac{2s-1}{s^2+1}}_{G}\right]$$

Hay que hallar

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] = x$$

$$g(x) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2+1}\right] =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2s}{s^2+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] =$$

$$= 2\cos(x) - \sin(x)$$

Por el teorema de convolución

$$\mathcal{L}^{-1}[F \cdot G] = f * g$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{2s-1}{s^2+1}\right) = \int_0^x (x-v)\left[2\cos(v) - \sin(v)\right] dv$$

$$= \underbrace{\int_0^{\infty} x\left[2\cos(v) - \sin(v)\right] dv}_{I_1} - \underbrace{\int_0^{\infty} v\left[2\cos(v) - \sin(v)\right] dv}_{I_2}$$

Hacemos cada una de las integrales por separado

$$I_1 = \int_0^x x(2\cos(v) - \sin(v)] dv =$$

$$= 2x\int_0^x \cos(v)dv - x\int_0^x \sin(v) =$$

$$= 2x \quad \sin(v)\Big]_0^x + x\cos(v)\Big]_0^x =$$

$$= 2x\sin(x) + x\cos(x) - x$$

$$I_2 = \int_0^x 2v\cos(v)\,dv - \int_0^x v\sin(v)dv =$$

$$= \left(2v\sin(v) + 2\cos(v)\right]_0^x + \left(v\cos(v) - \sin(v)\right]_0^x =$$

Por partes

$u = v \Rightarrow du = dv$

$dv = \cos(v)dv \Rightarrow v = \sin(v)$

$\int 2v\cos(v)dv = 2v\sin(v) - 2\int \sin(v)dv$

$= 2v\sin(v) + 2\cos(v)$

Por partes

$u = v \to du = dv$

$dv = \sin v\, dv$

$\Rightarrow v = -\cos(v)$

$\int v\sin(v)\,dv =$

$= -v\cos(v) + \int\cos(v)dv =$

$= -v\cos(v) + \sin(v)$

$$= 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2 + x\cos(x) - \sin(x) - x$$

con lo que

$$I_1 - I_2 = 2x\sin(x) + x\cos(x) - x - 2x\sin(x) -$$

$$- 2\cos(x) + 2 - x\cos(x) + \sin(x) + x =$$

$$= \boxed{-x - 2\cos(x) + 2 + \sin(x)}$$

que coincide con el resultado anterior

```
(%i4) Funcion:(2·s-1)/(s^2·(s^2+1));
```

(%o4) $$\frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}$$

```
(%i5) ilt(Funcion,s,x);
```

(%o5) $$\sin(x)-2\cos(x)-x+2$$

21-2

$$\mathcal{L}^{-1}{}_{s}\left[\frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}\right](x)$$

LENGUAJE NATURAL

ENTRADA MATEMÁT

Entrada

$$\mathcal{L}_s^{-1}\left[\frac{2s-1}{s^2(s^2+1)}\right](x)$$

Resultado

$$\operatorname{sen}(x) - x - 2\cos(x) + 2$$

Representaciones gráficas

TRANSFORMADAS de LAPLACE (Resumen)

$f(x)$	$F(s)=\mathcal{L}[f(x)]$	
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
x^n $n=0,1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\sin(ax)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos(ax)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\sinh(ax)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\cosh(ax)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$e^{ax}f(x)$	$F(s-a)$	
$f(cx)$	$\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right)$	$c>0$

$f*g$	$\mathcal{L}(f*g)$	
$\int_0^x f(t-v)\,g(v)\,dv = f*g\,(x)$	$F(s)\,G(s)$	tma de convolución

$$\mathcal{L}(y') = sY - y_0$$
$$\mathcal{L}(y'') = s^2Y - s\,y_0 - y_0'$$
$$\mathcal{L}(y''') = s^3Y - s^2y_0 - s\,y_0' - y_0''$$