Problemas de Transformada de Laplace

PEC 2015

a) Utilizando la transformada de Laplace resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} x^2 y'' - 12y = x \\ y(0) = 0 \ ; \quad y'(0) = -1/12 \end{cases}$$

b) analícese si existe o no unicidad en la solución. Justifíquese la respuesta

a) Se toma la transformada de Laplace, $\mathcal{L}$, en la ecuación

$$\mathcal{L}\left[x^2 y'' - 12y\right] = \mathcal{L}[x]$$

$$\mathcal{L}\left[x^2 y''\right] - \mathcal{L}[12y] = \mathcal{L}[x]$$

Recordar (pag 139)

$$\mathcal{L}[x f(x)] = -\frac{d}{ds}F(s)$$

$$\mathcal{L}[x^2 f(x)] = \frac{d^2}{ds^2}F(s)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{L}[x^n f(x)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s)$$

$$\mathcal{L}[x^2 y''] = \frac{d^2}{ds^2}\left[\mathcal{L}(y'')\right] =$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left[s^2 Y - s\,y(0) - y'(0)\right]$$

$$= \frac{d^2}{ds^2}\left[s^2 Y - 0 + \frac{1}{12}\right] = \frac{d}{ds}\left[2sY + s^2 Y'\right]$$

$$= 2Y + 2sY' + 2sY' + s^2 Y'' =$$

$$= s^2 Y'' + 4sY' + 2Y$$

Recordar que

$$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{L}[x] = \frac{1}{s^2}$$

La transformada de la ecuación

$$\mathcal{L}[x^2 y''] - 12\,\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[x]$$

Queda

$$s^2 Y'' + 4sY' + 2Y - 12Y = \frac{1}{s^2}$$

$$\boxed{s^2 Y'' + 4sY - 10Y = \frac{1}{s^2}}$$

Esta es una ecuación tipo Euler
(Lineal de coeficientes variables)

Se hace el cambio $s=e^t$

$$\frac{ds}{dt}=e^t \Rightarrow \frac{dt}{ds}=e^{-t}$$

$$\boxed{\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\frac{dy}{dt}\cdot e^{-t}}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{dy}{dt}e^{-t}\right]=\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}e^{-t}\right]\cdot\frac{dt}{ds}$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt}e^{-t}\right]\cdot e^{-t}=\left[\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t}-\frac{dy}{dt}e^{-t}\right]e^{-t}$$

$$=\boxed{e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]}$$

$$e^{2t}\cdot\left[e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]\right]+4e^t\cdot e^{-t}\frac{dy}{dt}-10y=e^{-2t}$$

$$y''-y'+4y'-10y=e^{-2t}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}-10y=e^{-2t}}$$

Es una ecuación lineal de coeficientes constantes

Polinomio característico

$$r^2+3r-10=0 \Rightarrow \begin{cases} r=2 \\ r=-5 \end{cases}$$

luego la solución general de la homogénea es

$$y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}$$

Para hallar la solución particular de la completa, ensayamos $y_p = Ae^{-2t}$

sustituyendo resulta que

$$y_p = -\frac{1}{2}e^{-2t}$$

Por consiguiente

$$y = \underbrace{c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}}_{y_H} \underbrace{- \frac{1}{2} e^{-2t}}_{y_p}$$

Deshaciendo el cambio $s = e^t$

$$Y = c_1 s^2 + c_2 s^{-5} - \frac{1}{2} s^{-2}$$

como la transformada de Laplace de cualquier función $\to 0$ cuando $s \to \infty$

c_1 tiene que ser $c_1 = 0$

Así pues

$$Y = c_2 s^{-5} - \frac{1}{2} s^{-2}$$

Para calcular la solución $y = \mathcal{L}^{-1}(Y)$

$$y = \mathcal{L}^{-1}[Y] = c_2 \mathcal{L}^{-1}(s^{-5}) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}(s^{-2})$$

$$= C_2 x^4 - \frac{1}{12}x$$

Recordar que

$$\mathcal{L}(x^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad n \in \mathbb{N}$$

b) Como se puede ver, NO hay unicidad de las soluciones, pues existen infinitas soluciones (una para cada valor de C) para el problema de valores iniciales.

Ello es debido a que las condiciones iniciales están dadas en el punto $x=0$, donde no se verifica el teorema de existencia y unicidad (pag 72 del libro de texto)

<u>Tma</u> de Existencia y unicidad

$$\text{P. C.} \begin{cases} y^{n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{n-1)}) \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0 \ \ldots\ y^{n-1}(x_0) = 0 \end{cases}$$

El problema de Cauchy PC tiene solución única ~~Si~~

$$\begin{cases} f \text{ es continua} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y'}, \dots \dfrac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \text{ son continuas} \end{cases}$$

En nuestro caso el problema de Cauchy es

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{x+12y}{x^2} \\ y(0) = 0 \;;\; y'(0) = -1/12 \end{cases}$$

En donde

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x+12y}{x^2} & \text{no es continua para } x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{12}{x^2} & \text{no es continua para } x=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y'} = 0 & \text{es continua} \end{cases}$$

Septiembre de 2015

Aplicando la transformada de Laplace, resuelve el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{2dy}{dx} - 8y = 0 \\ y(0)=3 \; ; \; y'(0)=6 \end{cases}$$

Tomando la transformada de Laplace en los dos miembros

$$\mathcal{L}[y'' - 2y' - 8y] = \mathcal{L}[0]$$

Recordando que

$$\mathcal{L}[y''] = s^2 Y - s y(0) - y'(0) =$$

$$= s^2 Y - 3s - 6$$

$$\mathcal{L}[y'] = sY - y(0) = sY - 3$$

$$s^2Y - 3s - 6 - 2sY + 6 - 8Y = 0$$

$$(s^2 - 2s - 8)\,Y - 3s = 0$$

$$Y = \frac{3s}{s^2 - 2s - 8} = \frac{3s}{(s-4)(s+2)} = \frac{2}{s-4} + \frac{1}{s+2}$$

Invirtiendo la transformada de Laplace

8

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-4}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= 2e^{4x} + e^{-2x}$$

$$\boxed{\text{Recordar que } \mathcal{L}[e^{ax}] = \frac{a}{s-a}}$$

Esto problema se puede hacer de manera muy sencilla directamente ya que es una ecuación homogénea con coeficientes constantes con polinomio característico

$$r^2 - 2r - 8 \Rightarrow \begin{cases} r = 4 \\ r = -2 \end{cases}$$

con lo cual la solución general es

$$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$$

con las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 = 3 \\ y'(0) &= 4c_1 - 2c_2 = 6 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-12}{-6} = 2 \\ c_2 = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-6}{-6} = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 3 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases}}$$

Junio 2014

a) Aplicando la definición de transformada de Laplace demuestra que $\mathcal{L}[xe^{-x}] = \frac{1}{(s+1)^2}$

b) Resuelve el problema de valores iniciales
$$y' + (e^{-2x} * y) = 1 \quad ; \quad y(0) = 0$$

a) Aplicando la definición de transformada de Laplace
$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\, dx$$
Resulta en nuestro caso
$$\mathcal{L}[x e^{-x}] = \int_0^\infty e^{-sx} x e^{-x} dx = \int_0^\infty x e^{-x(s+1)} dx =$$

Calculamos la primitiva de $\int x e^{-x(s+1)} dx$

Integrando por partes
$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv\ e^{-x(s+1)} \Rightarrow v = -\frac{1}{s+1} e^{-x(s+1)} \end{cases}$$
$$\int x e^{-x(s+1)} dx = -\frac{1}{s+1} x e^{-x(s+1)} + \int \frac{1}{s+1} e^{-x(s+1)} dx$$
$$= -\frac{1}{s+1} x e^{-x(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2} e^{-x(s+1)}$$

$$= -\frac{1}{s+1}\, x\, e^{-x(s+1)}\Big]_0^\infty - \frac{1}{(s+1)^2} e^{-x(s+1)}\Big]_0^\infty =$$

0

$$= 0 - \left(0 - \frac{1}{(s+1)^2}\right) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

<u>De otro modo</u>

Si se utiliza la fórmula

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = F(s-a)$$

Ya que

$$\mathcal{L}[e^{ax} f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} e^{ax} f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{(a-s)x} f(x)\, dx = F(s-a)$$

Resulta

$$\mathcal{L}[x e^{-x}] = \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{s^2} \; ; \; F(s) = \frac{1}{s^2} \; ;$$

$$F(s-(-1)) = F(s+1) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

b) Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}(y') = sY - y(0)$$

$$\mathcal{L}(f*g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g) = F \cdot G$$

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$$

aplicando la transformada de Laplace al problema

$$\mathcal{L}[y' + (e^{-2x} * y)] = \mathcal{L}[1]$$

$$\mathcal{L}[y') + \mathcal{L}[e^{-2x} * y] = \mathcal{L}[1]$$

$$sY - 0 + \frac{1}{s+2} \cdot Y = \frac{1}{s}$$

$$Y\left(s + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y\left(\frac{s^2+2s+1}{s+2}\right) = \frac{1}{s}$$

$$Y\,\frac{(s+1)^2}{s+2} = \frac{1}{s} \Rightarrow Y = \frac{s+2}{s(s+1)^2}$$

Se descompone en fraciones elementales

$$\frac{s+2}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1} = \frac{2}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{2}{s+1}$$

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{s(s+1)^2}\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) - 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)$$

$$y = 2 - x e^{-x} - 2e^{-x} =$$

$$\boxed{y = 2 - (x+2)e^{-x}}$$

Problema (Junio 2020) 13

La función $y(x)$ que verifica

$$\mathcal{L}[y(x)*(x^2e^x)] = \frac{2}{s(s-1)^4}$$ es

A) $y(x) = x+e^x$

B) $y(x) = 1+e^x$

C) $y(x) = e^x$

D) Ninguna de las anteriores

Respuesta

Hay que aplicar el teorema de Convolución: $\boxed{\mathcal{L}[f*g] = F\cdot G}$

teniendo en cuenta que

$$\mathcal{L}[x^2e^x] = \frac{2}{(s-1)^3}$$

Recuerda que

$$\mathcal{L}[f(x)\,e^{ax}] = F(s-a)$$

Si $f(x) = x^2 \rightarrow \mathcal{L}[x^2] = \frac{2}{s^3}$

$\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$ $n \in \mathbb{N}$

Por el teorema de convolución

$$\mathcal{L}\left[y(x) * xe^{x}\right] = \mathcal{L}(y) \cdot \mathcal{L}(xe^{x}) =$$

$$= \mathcal{L}(y) \cdot \frac{2}{(s-1)^3}$$

Con lo cual la ecuación planteada es

$$\mathcal{L}(y) \cdot \frac{2}{(s-1)^3} = \frac{2}{s(s-1)^4}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y) = \frac{1}{s(s-1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} = \frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}$$

Por consiguiente

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) =$$

$$= e^{x} - 1$$

Recordar que
$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$
$\mathcal{L}(e^{ax}) = \frac{1}{s-a}$

$$\boxed{y = e^{x} - 1}$$

OPCIÓN D