EJERCICIOS de SUPERFICIES

allave@madrid.uned.es

Junio 2018

Sea S la superficie parametrizada para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ por

$$\vec{x}(u,v) = (u,\ u^2+v^2,\ u^2-v)$$

a) Estudie si es una parametrización regular

b) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental

c) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental

d) Sea la curva $\mathcal{C}$ incluida en S, definida por

$$\vec{\alpha}(t) = (0,\ t^2,\ t)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$

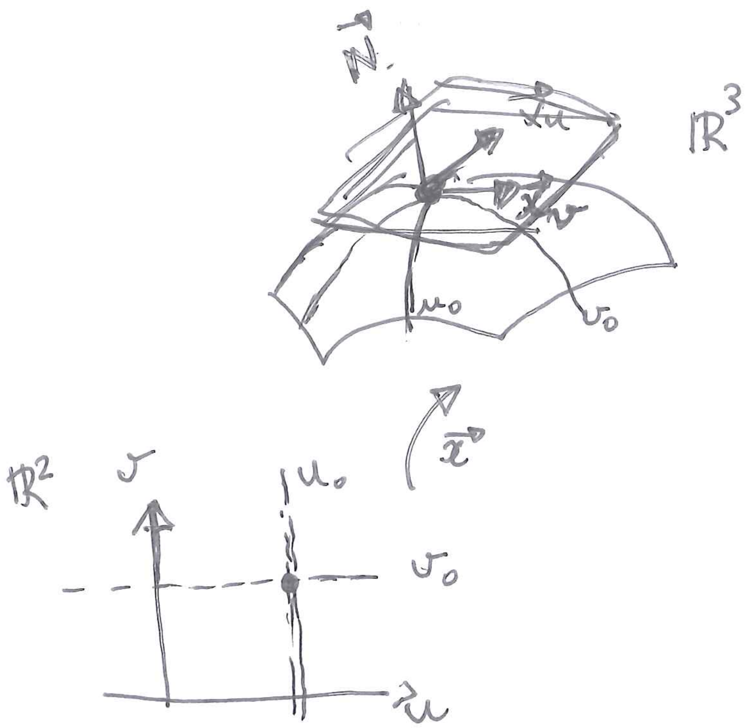
a)

<u>Recordatorio</u>: Un punto $\vec{x}_0 = \vec{x}(u_0, v_0)$ de S es $\boxed{\text{regular}}$ si

$$\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\} \text{ son linealmente independientes}$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq (0,0,0)$$



En nuestro caso

$$\vec{x}(u, \vec{v}) = (u,\ u^2+v^2\ \ u^2-v)$$

$$\vec{x}_u = (1,\ 2u,\ 2u)$$

$$\vec{x}_v = (0, 2v, -1)$$

Esta claro que $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ para todos los valores de u y de v forman un sistema linealmente independiente

$$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2u & 2u \\ 0 & 2v & -1 \end{pmatrix} = 2 \qquad \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

ya que es el rango de una matriz escalonada

También podríamos haber calculado

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 2u \\ 0 & 2v & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-2u-4uv,\ 1,\ 2v) \neq (0,0,0)$$

esta coordenada no se anula nunca

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

Recordatorio:

b) La $\boxed{\text{primera forma fundamental}}$ nos proporciona una métrica local en un punto de la superficie. Medir en el entorno de un punto equivale a medir en el plano con la métrica

$$I(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = ds^2$$

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 2u, 2u) \cdot (1, 2u, 2u) =$$

$$= 1 + 4u^2 + 4u^2 = 1 + 8u^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1, 2u, 2u) \cdot (0, 2v, -1) =$$

$$= 0 + 4uv - 2u = 2u(2v - 1)$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0, 2v, -1) \cdot (0, 2v, -1) =$$

$$= 4v^2 + 1$$

c) Para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental es necesario calcular el vector normal a la superficie en un punto.

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{4u^2(1+2v)^2 + 1 + 4v^2}} (-2u(1+2v), 1, 2v)$$

Recordar que

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 2u \\ 0 & 2v & -1 \end{vmatrix} = (-2u(1+2v), 1, 2v)$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental es

Recordatorio

$$e = L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = \frac{\det(\vec{x}_{uu}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$f = M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = \frac{\det(\vec{x}_{uv}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$g = N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = \frac{\det(\vec{x}_{vv}, \vec{x}_u, \vec{x}_v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

$$\boxed{\mathrm{II}(du, dv) = e\, du^2 + 2 f\, du\, dv + g\, dv^2}$$

En nuestro caso:

$\vec{x}_u = (1, 2u\ 2u)$ | $\vec{x}_v = (0, 2v, -1)$

$\vec{x}_{uu} = (0, 2, 2)$ | $\vec{x}_{vu} = (0, 0, 0)$

$\vec{x}_{uv} = (0, 0, 0)$ $=$ | $\vec{x}_{vv} = (0, 2, 0)$

$$e = L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = (0, 2, 2) \cdot \frac{1}{\sqrt{*}} \left(-2u(1+2v), 1, 2v\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}} (2 + 4v) = \frac{1}{\sqrt{*}}\, 2(1+2v)$$

$$\left[* = \sqrt{4u^2(1+2v)^2 + 1 + 4v^2} \right]$$

$$f = M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = (0,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{*}} \left(-2u(1+2v), 1, 2v\right) = 0$$

$$g = N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = (0,2,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{*}} \left(-2u(1+2v), 1, 2v\right) =$$

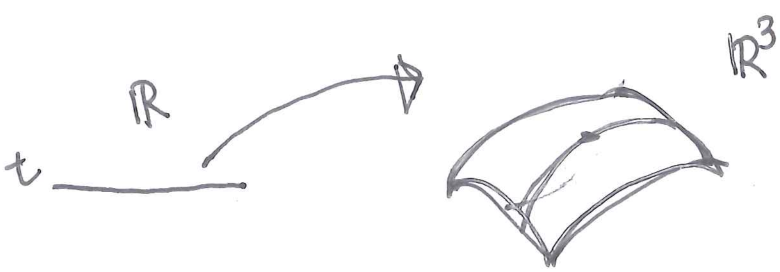
$$= \frac{1}{\sqrt{*}} \cdot 2$$

En donde

$$(*) = 4u^2(1+2v)^2 + 1 + 4v^2$$

d) En primer lugar, comprobamos que, en efecto, la curva $\mathcal{C}$ está incluida en la superficie S

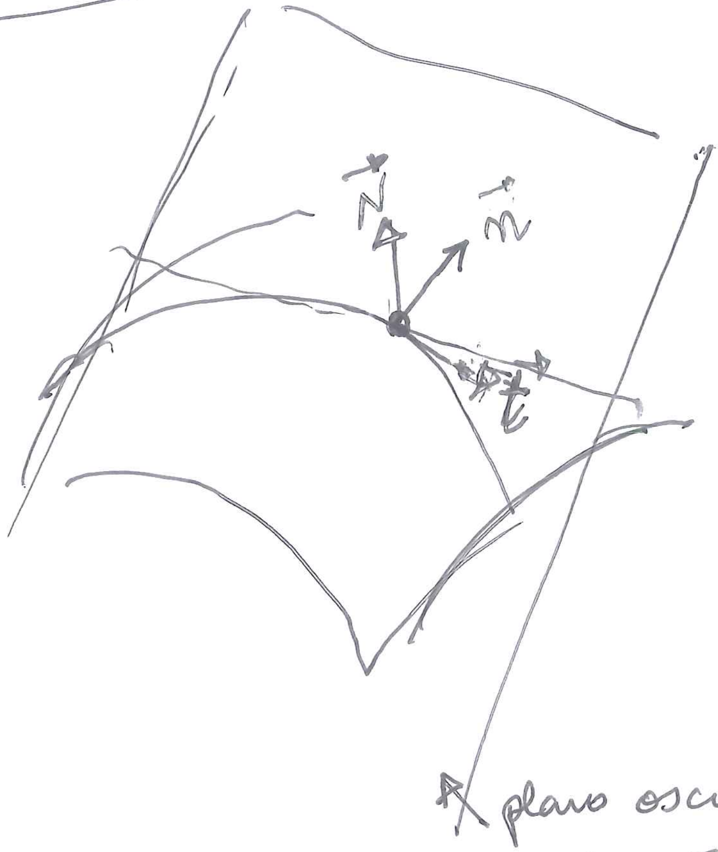
$$\begin{cases} \mathcal{C} \equiv \vec{\alpha}(t) = (0, t^2, t) \\ S \equiv \vec{x}(u,v) = (u, u^2+v^2, u^2 - v) \end{cases}$$



En efecto $\begin{cases} u = 0 \\ v = -t \end{cases}$ es una recta en $\mathbb{R}^2$

que se transforma en $\mathcal{C}$

Recordatorio



$\vec{n}$ = vector normal de la curva

$\vec{t}$ = vector tangente de la curva

$\vec{N}$ = vector normal de la superficie

plano osculador de la curva $\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$

Si $\vec{\alpha}(t)$ es la ecuación de la curva

El vector normal de la curva $\vec{n}$ tiene la dirección de

$$\left[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\right] \times \vec{\alpha}'(t)$$

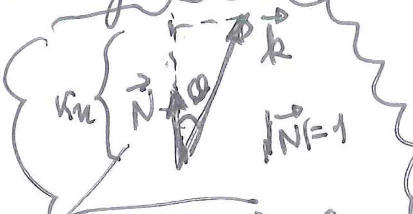
La curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{\| \vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t) \|}{\| \vec{\alpha}'(t) \|^3}$$

El vector de curvatura $\vec{k}$, de la curva es

$$\vec{k} = \frac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \, \vec{n}$$

El vector de curvatura se descompone en dos componentes. Una en la dirección de $\vec{N}$ y otra en el plano tangente T_p



$$\vec{k} = \vec{K_n} + \vec{K_g}$$

curvatura normal en la dirección de $\vec{N}$

curvatura geodésica en el plano tangente

$K_n = |\vec{k}| \cos\theta = |\vec{k}||\vec{N}|\cos\theta = \vec{k}\cdot\vec{N}$

$$\vec{K_n} = (\vec{k}\cdot\vec{N})\,\vec{N} \quad \text{(vector curvatura normal)}$$

$$K_n = \vec{k}\cdot\vec{N} \quad \text{(curvatura normal)}$$

En el punto $\vec{\alpha}(0) = (0,0,0)$ vamos a calcular la curvatura de α

$$\vec{\alpha}'(t) = (0,2t,1) \to \alpha'(0) = (0,0,1)$$
$$\vec{\alpha}''(t) = (0,2,0) \to \alpha''(0) = (0,2,0)$$

El vector $\vec{n}$ tiene la dirección de

$$[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \times (0,0,1) =$$

$$= (-2,0,0) \times (0,0,1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0,2,0)$$

Por tanto el vector $\vec{n}$ normal a la curva es

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{0+4+0}}(0,2,0) = (0,1,0)$$

La curvatura es

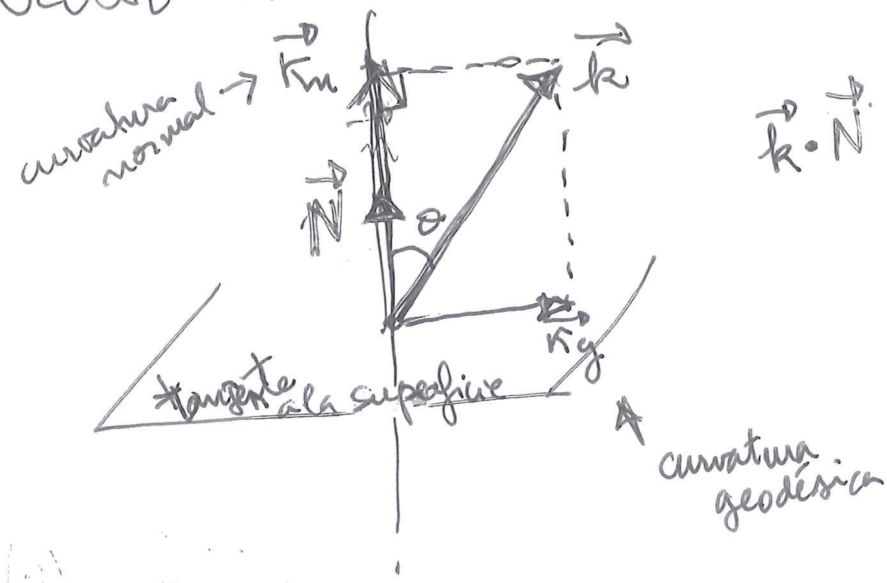
$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0)\|}{\|\vec{\alpha}'(0)\|^3} = \frac{\|(-2,0,0)\|}{\|(0,0,1)\|^3} =$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

El vector de curvatura

$$\vec{k} = \kappa \vec{n} = 2(0,1,0) = (0,2,0)$$

Ahora hay que descomponer el vector $\vec{k}$ en dos componentes



$$\vec{k} \cdot \vec{N} = |\vec{k}|\,\overset{=1}{|\vec{N}|}\cos\alpha = |\vec{k}|\cos\alpha = |\vec{k}_n|$$

$$K_n(0) = \vec{k} \cdot \vec{N} = (0,2,0) \cdot (0,1,0) = 2$$

$\vec{N}(0,0)$ vector normal a la superficie en el punto $(0,0,0)$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{x}_u \times \vec{x}_v(0,0)$

$$\vec{x}_u(0,0) = (1,0,0)$$

$$\vec{x}_v(0,0) = (0,0,-1)$$

$$\vec{x}_u(0,0) \times \vec{x}_v(0,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

Como este vector es unitario

$$\vec{N} = (0,1,0)$$

Comentario

$\vec{n}(0) = (0,1,0)$ vector normal de la curva

$\vec{N}(0,0) = (0,1,0)$ vector normal de la superficie

La curvatura geodésica es $K_g(0,0) = 0$

Junio 2018

Sea S la superficie dada para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, por las ecuaciones paramétricas

$$\vec{x}(u,v)=(u,\ v,\ u^2-v^2+uv)$$

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental en un punto genérico $\vec{x}(u,v)$ y en $\vec{x}(0,0)$

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental en el punto genérico $\vec{x}(u,v)$ y en $\vec{x}(0,0)$.

c) Clasifique el punto $\vec{x}(0,0)$

a) En este caso $\vec{x}(0,0)=(0,0,0)$

$$\vec{x}_u=(1,\ 0,\ 2u+v)\ \rightarrow\ \vec{x}_u(0,0)=(1,0,0)$$

$$\vec{x}_v=(0,\ 1,\ -2v+u)\rightarrow \vec{x}_v(0,0)=(0,1,0)$$

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 0, 2u+v)\cdot(1, 0, 2u+v) =$$
$$= 1 + (2u+v)^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1, 0, 2u+v)\cdot(0, 1, -2v+u) =$$
$$= (2u+v)(-2v+u)$$

$$G = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (0, 1, -2v+u)\cdot(0, 1, -2v+u) =$$
$$= 1 + (u-2v)^2$$

En el punto $\vec{x}(0,0) = (0,0,0)$

$$E = 1 \quad ; \quad F = 0 \quad ; \quad G = 1$$

b) Para calcular los coeficientes de la segunda forma necesitamos conocer el vector normal a la superficie

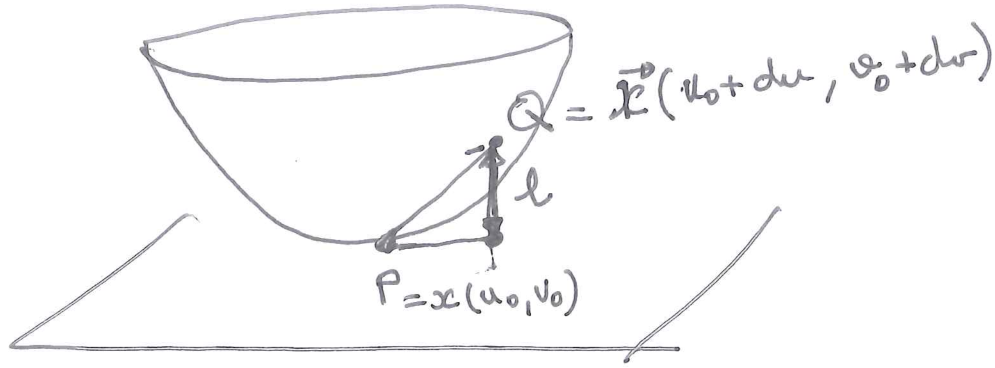
$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-2u-v, 2v-u, 1)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u+v \\ 0 & 1 & -2v+u \end{vmatrix} = (-2u-v, 2v-u, 1)$$

$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \sqrt{(-2u-v)^2 + (2v-u)^2 + 1} = \sqrt{5u^2 + 5v^2 + 1} = \sqrt{*}$$

Recordatorio.

La segunda forma cuadrática se utiliza para medir la distancia a la que está un punto.



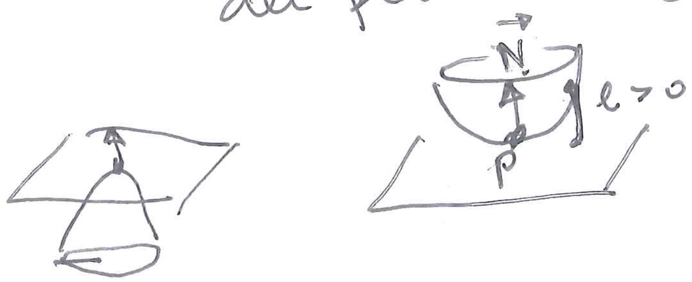
$$l = \frac{1}{2} II_p(du, dv)$$

$$= \frac{1}{2}(du, dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Es una forma cuadrática.

Si $eg - f^2 > 0$

Todos ~~los~~ puntos están del mismo lado del plano tangente



PUNTO ELÍPTICO

$$e = L = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{*}} (-2u-v, 2v-u, 1) \cdot (0,0,2) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{*}}$$

$$f = M = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{*}} (-2u-v, 2v-u, 1) \cdot (0,0,1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}}$$

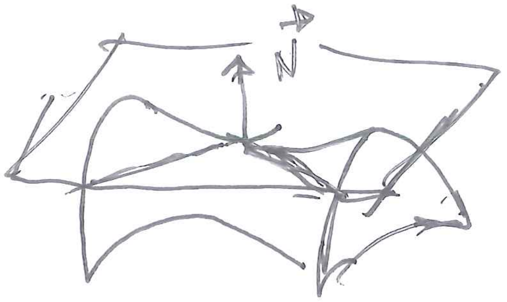
$$g = N = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{*}} (-2u-v, 2v-u, 1) \cdot (0,0,-2) =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{*}}$$

En el punto $\vec{x}(0,0) = (0,0,0)$

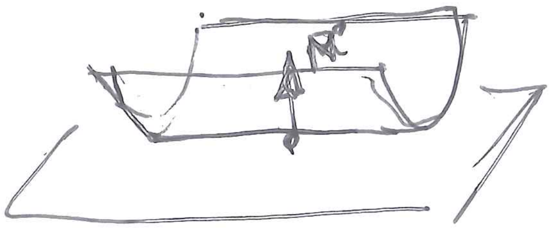
$e = L = 2 \; ; f = M = 1, g = N = -2$

III $eg - f^2 < 0$ La superficie atraviesa el plano tangente en las direcciones asintóticas



PUNTO HIPERBÓLICO

IV $eg - f^2 = 0$ La superficie se apoya en el plano tangente. Punto plano



PUNTO PARABÓLICO

En nuestro caso. En el punto

$$\vec{x}(0,0) = (0,0,0)$$

$$eg - f^2 = 2 \cdot (-2) - 1^2 = -4 - 1 = -5 < 0$$

Es un <u>punto hiperbólico</u>

Comentario

En esta superficie todos los puntos son hiperbólicos

$$eg - f^2 = \frac{2}{\sqrt{*}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{*}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{*}}\right)^2 =$$

$$= \frac{-4}{*} - \frac{1}{*} = \frac{-5}{\underbrace{5u^2+5v^2}_{\text{Suma de cuadrados}}+1} < 0$$

$\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

Septiembre 2018

Sea S la superficie parametrizada

$$\vec{x}(u,v) = (uv^2,\ uv-1,\ v^2-uv)$$

a) Determine ~~el~~ conjunto M de puntos singulares de S respecto de esta parametrización

b) Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto correspondiente a $u=1$, $v=1$.

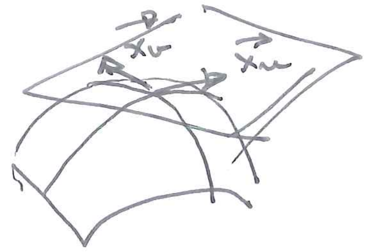
c) Determine la ecuación de la recta normal a S en el punto correspondiente a $u=1$, $v=1$

a) ~~Los~~ puntos <u>singulares</u> son aquello en los que

$$\text{rango}\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\} < 2$$

lo que equivale a que

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = (0, 0, 0)$$



Como

$$\vec{x}_u = (v^2, v, -v)$$

$$\vec{x}_v = (2uv, u, 2v-u)$$

Resulta que

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v^2 & v & -v \\ 2uv & u & 2v-u \end{vmatrix} =$$

$$= (2v^2, -v^2(2v+u), -uv^2)$$

Los puntos singulares son en los que se verifica

$$\begin{cases} 2v^2 = 0 \\ -v^2(2v-u) = 0 \\ -uv^2 = 0 \end{cases}$$

Mirando la primera ecuación. Solo se anula cuando $v=0$

Como $v=0$ también anula las otras ecuaciones

$$M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } v=0\}$$

son puntos singulares

En la superficie los puntos singulares son $\vec{x}(M) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (0,-1,0)\}$

Luego el punto singular de la superficie es $(0,-1,0)$ respecto a esta parametrización

b) Para $u=1$, $v=1$

$$\vec{x}(1,1) = (1,0,0) = P$$

El plano ~~tangente~~ en el punto P es el plano que tiene tiene el punto P como punto de apoyo y $\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$ como vectores

$= \langle (1,1,-1), (2,1,1) \rangle$ directores

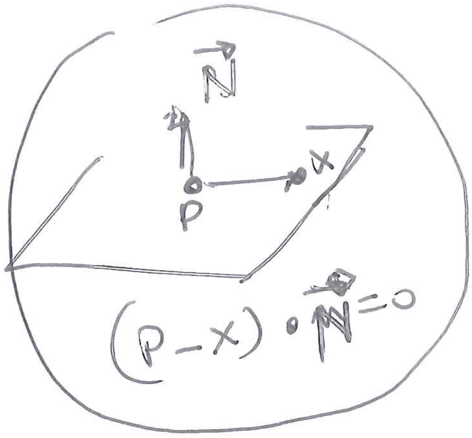
O bien, tiene P como punto de apoyo y $\vec{N} = \vec{x}_u \times \vec{x}_v = (2,-3,-1)$ como vector ortogonal

Es decir plano tangente

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(En paramétricos)

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$



$$\Leftrightarrow \quad 2(x-1) - 3(y-0) - (z-0) = 0$$

$$2x - 3y - z - 2 = 0$$

c) La recta normal es la que pasa por P con dirección $\vec{N}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-0}{-1}$$

Junio 2019

Sea $\vec{x}(u,v)$, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ una parametrización. Defina punto regular de la superficie y explique qué significa que una parametrización es regular

Se dice que un punto de la superficie $\vec{x}(u_0,v_0)$ es regular si

$$\operatorname{rang}\left(\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\right) = 2$$

Esto es equivalente a que

$$\vec{x}_u(u_0,v_0) \times \vec{x}_v(u_0,v_0) \neq (0,0,0)$$

Una parametrización es regular si todos sus puntos son regulares

Junio de 2019

Sea S la superficie dada por

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, v e^u)$$

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental

c) Clasifique los puntos de la superficie

d) Con la parametrización $\vec{x}(u,v) = (u, v, v e^u)$ de S, compruebe que las curvas $v = u+1$ y $v = -u+1$ verifican la ecuación diferencial de las líneas de curvatura que pasan por $\vec{x}(0,1)$. Para ello, determine primero esta ecuación diferencial y compruebe que estas curvas la verifican.

a) Para determinar los coeficientes de la primera forma fundamental calculamos los vectores directores del plano tangente

$$\vec{x}_u = (1, 0, ve^u) \quad ; \quad \vec{x}_v = (0, 1, e^u)$$

$$\mathrm{I} \left\{ \begin{array}{l} E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 0, v e^u) \cdot (1, 0, v e^u) = \\ \qquad = 1 + v^2 e^{2u} \\ F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1, 0, v e^u) \cdot (0, 1, e^u) = \\ \qquad = v e^{2u} \\ G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0, 1, e^u) \cdot (0, 1, e^u) = \\ \qquad = 1 + e^{2u} \end{array} \right.$$

La primera forma fundamental define un producto escalar en el plano tangente

b) Necesitamos calcular el vector normal a la superficie

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{*}} (-ve^u, -e^u, 1)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & ve^u \\ 0 & 1 & e^u \end{vmatrix} = (-ve^u, -e^u, 1)$$

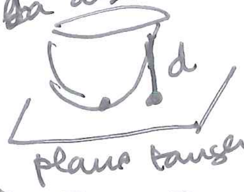
$$\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\| = \sqrt{v^2 e^{2u} + e^{2u} + 1} = \sqrt{*}$$

$$\vec{x}_{uu} = (0, 0, ve^u)$$

$$\vec{x}_{uv} = (0, 0, e^u)$$

$$\vec{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

La segunda forma fundamental mide la distancia al



$$\mathrm{II} \begin{cases} L = e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \dfrac{1}{\sqrt{*}} (-ve^u, -e^u, 1)(0, 0, ve^u) = \\[2ex] = \dfrac{1}{\sqrt{*}} ve^u \\[2ex] M = f = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \dfrac{1}{\sqrt{*}} (-ve^u, -e^u, 1)(0, 0, e^u) = \\[2ex] = \dfrac{1}{\sqrt{*}} e^u \\[2ex] N = g = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \dfrac{1}{\sqrt{*}} (-ve^u, -e^u, 1) \cdot (0, 0, 0) = \end{cases}$$

$$= 0$$

d) Para clasificar los puntos de la superficie hay que estudiar el signo de

$$\mathrm{II} = eg - f^2 \begin{cases} > 0 & \text{pto elíptico} \\ < 0 & \text{pto hiperbólico} \\ = 0 & \text{pto parabólico} \end{cases}$$

$$eg - f^2 = \frac{1}{\sqrt{*}}\, v e^{u} \cdot 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{*}}\, e^{u}\right)^2 =$$

$$= -\left(\frac{1}{*}\, e^{2u}\right) = \frac{-1}{v^2 e^{2u} + e^{2u} + 1}\, e^{2u} < 0$$

Esta cantidad es siempre negativa $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

ya que $\begin{cases} v e^{2u} + e^{2u} + 1 > 0 \\ e^{2u} > 0 \end{cases}$ $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$

Por tanto, todos sus puntos son hiperbólicos.

d) Vamos a estudiar las formas I y II en el punto $\vec{x}(0,1) = (0,1,1)$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$$

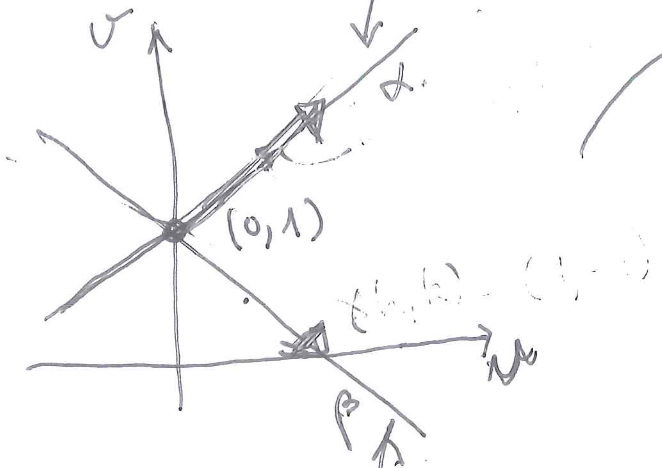
$E = 2$; $F = 1$; $G = 2$

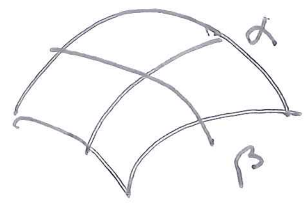
$L = e = 1$; $M = f = 1$; $N = g = 0$

27

La curva $v = u+1$ $(\vec{\alpha})$

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, ve^u)$$





La curva $v = -u+1$ (β)

Haciendo $u = t$

tenemos las curvas que están en la superficie

$$\vec{\alpha}(t) = (t,\ t+1,\ (t+1)e^t)$$

$$\vec{\beta}(t) = (t,\ -t+1,\ (-t+1)e^t)$$

El punto $\vec{x}(0,1) = \alpha(0) = (0,1,1)$

$$= \beta(0) = (0,1,1)$$

El vector tangente, $\vec{t}$, a $\vec{\alpha}(t)$ está en la dirección de $\vec{\alpha}'(t) = (1,\ 1,\ (t+2)e^t)$

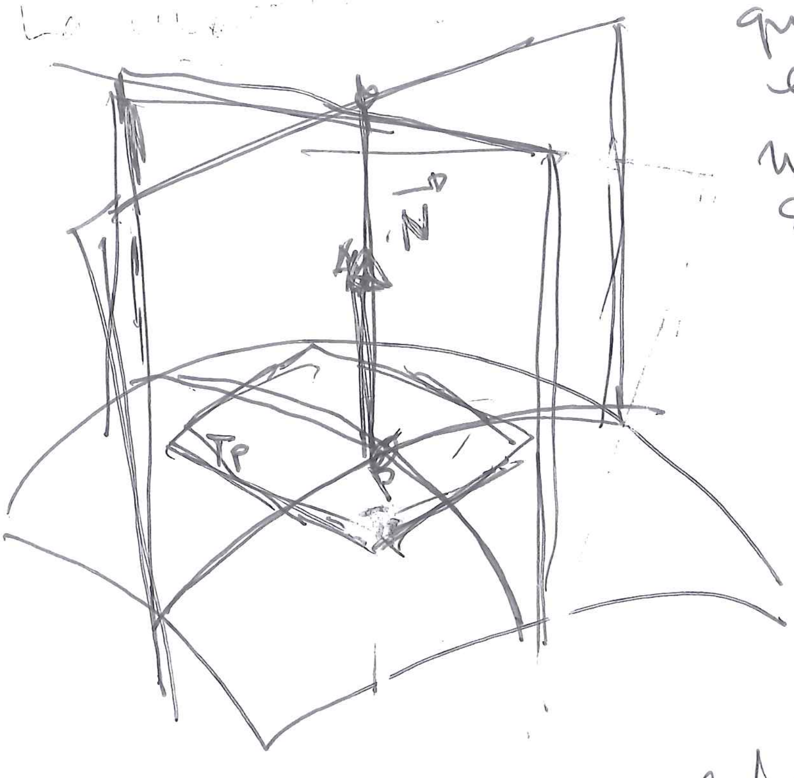
$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 1, 2)$$

$$\vec{\beta}'(t) = (1, -1, -te^t)$$

$$\vec{\beta}'(0) = (1, -1, 0)$$

Secciones normales

Consideremos un haz de planos que tiene como eje la dirección normal de la superficie $\vec{N}$



Cada uno de los planos del haz corta a la superficie en una curva γ.
Estas curvas solo tienen curvatura normal $K_n(h, k)$

(h, k) es la dirección en el plano tangente de la tangente a la curva

$$K_n(h,k) = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}(h,k) =$$

$$= \frac{e h^2 + 2f hk + g k^2}{E h^2 + 2F hk + \cancel{G} k^2}$$

El máximo y el mínimo de $K_n(h,k)$ se da cuando

$$\frac{\partial K_n}{\partial h} = 0 \qquad \frac{\partial K_n}{\partial k} = 0$$

Estas son las direcciones principales que equivalen a verificar

$$\begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

En nuestro caso

$$\begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2k^2 - 2hk + h^2 = 0$$

Si llamamos

$h = du \qquad k = dv$

$$\boxed{-2(dv)^2 - 2\,du\,dv + (du)^2 = 0}$$

Esta es la ecuación de las direcciones principales

En la curva $v = u+1$ se tiene que

$du = dv$

¿Verifica la ecuación?

$$-2(du)^2 - 2(du)^2 + (du)^2 = -3(du)^2 \neq 0$$

No se verifica

En la curva $v = -u+1$ se tiene que

$dv = -du$

$$-2(dv)^2 + 2(dv)^2 + (dv)^2 = (dv)^2 \neq 0$$

tampoco se verifica

Si queremos hallar las direcciones principales hay que resolver

$$-2(dv)^2 - 2\,du\,dv + (du)^2 = 0$$

dividiendo por $(dv)^2$

$$-2 - 2\frac{du}{dv} + \left(\frac{du}{dv}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dv} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 1 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} du = (1+\sqrt{3})\,dv \Rightarrow u = (1+\sqrt{3})v + C_1 \\ du = (1-\sqrt{3})\,dv \Rightarrow u = (1-\sqrt{3})v + C_2 \end{cases}$$

la constante C se ajusta con la condición $u=0, v=1$

$C_1 = -1-\sqrt{3}$ $\qquad C_2 = -1+\sqrt{3}$

Junio 2019

Sea S la superficie parametrizada para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, por

$$\vec{x}(u,v)=(u+v,\ u-v^2,\ u^2+v)$$

a) Determine el conjunto de puntos singulares para esta parametrización

b) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental donde la superficie sea regular

c) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental donde la superficie sea regular

d) Sea la curva

$$\vec{\alpha}(t)=(t,t,t^2) \quad \text{para } t\in\mathbb{R}$$

Calcule la curvatura normal en $\vec{\alpha}(0)$

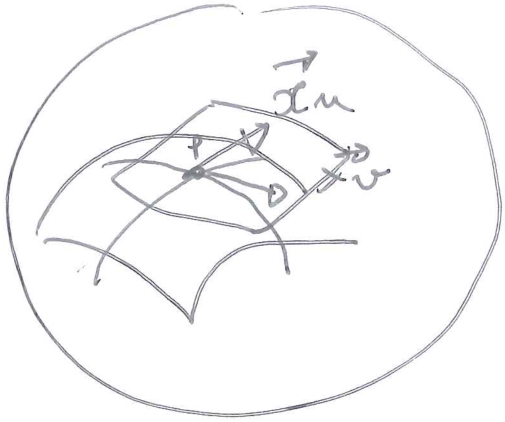
a) La parametrización es regular si

$$\vec{x}_u(u,v)\times\vec{x}_v(u,v)\neq(0,0,0)$$

$\Longleftrightarrow \{\vec{x}_u,\vec{x}_v\}$ linealmente independientes

En nuestro caso

$$\vec{x}_u = (1, 1, 2u)$$



$$\vec{x}_v = (1, -2v, 1)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -2v & 1 \end{vmatrix} = (1+4uv,\ 2u-1,\ -2v-1)$$

Son puntos singulares los que

$$\begin{cases} 1+4uv = 0 \\ 2u-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 1/2 \\ -2v-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -1/2 \end{cases}$$

comprobamos que el valor

$u = 1/2$, $v = -\frac{1}{2}$ verifica

las tres ecuaciones.

El punto $\vec{x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

Es un punto singular

b) Los coeficientes de la primera forma fundamental son para los punto regulares

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 1, 2u) \cdot (1, 1, 2u) =$$

$$= 2 + 4u^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1, 1, 2u)(1, -2v, 1) =$$

$$= 1 + 2u - 2v$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (1, -2v, 1) \cdot (1, -2v, 1) =$$

$$= 2 + 4v^2$$

c) Para calcular los coeficientes de la segunda forma necesitamos calcular el vector $\vec{N}$ normal a la superficie

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \|} = \frac{1}{\sqrt{*}} (4uv + 1, 2u - 1, -2v - 1)$$

$$\| \vec{x}_u \times \vec{x}_v \| = \sqrt{(4uv+1)^2 + (2u-1)^2 + (-2v-1)^2} =$$

$$= \sqrt{*}$$

$$\vec{x}_{uu} = (0, 0, 2) \; ; \; \vec{x}_{uv} = (0, -2, 0) \; ; \; \vec{x}_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$L = e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{*}} (4uv+1, 2u-1, -2v-1) \cdot (0,0,2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}} (-2)(2v+1)$$

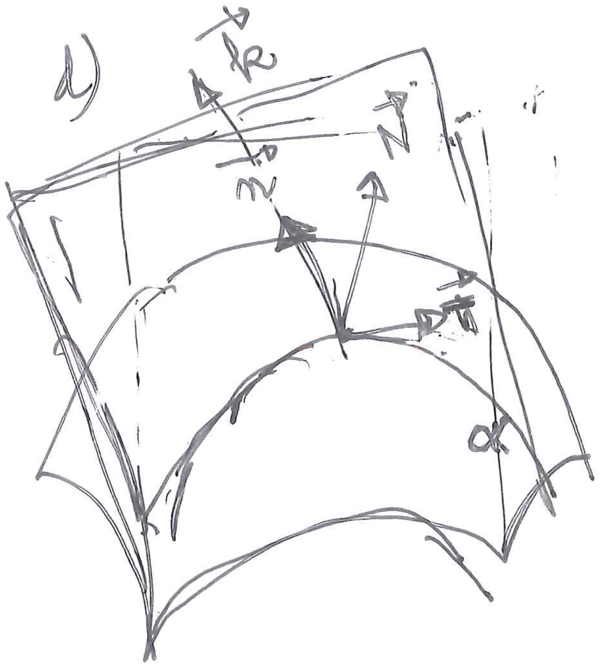
$$M = f = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{*}} (4uv+1, 2u-1, -2v-1) \cdot (0,0,0) =$$

$$= 0$$

$$N = g = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{*}} (4uv+1, 2u-1, -2v-1) \cdot (0,-2,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}} \; 2(1-2u)$$

d)



La curva $\vec{\alpha}(t)$ en $\vec{\alpha}(0)$ tiene un vector normal $\vec{n}$ y una curvatura k,

En ese punto el vector de curvatura es

$$\vec{k} = k\vec{n}$$

Este vector $\vec{k}$ lo descomponemos en dos componentes

$$\vec{k} = \vec{k}_n + \vec{k}_g$$

según la dirección de $\vec{N}$ (curvatura normal)

en el plano tangente, T. (curvatura geodésica)

de modo que

$$\vec{k}_n = K_n \vec{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K_n = \vec{k} \cdot \vec{N}}$$

Para hacer todos ~~estos~~ cálculos tenemos en cuenta que para la curva $\vec{\alpha}(t)$ $\vec{n}$ (vector normal de la curva) tiene la dirección de

$$\left(\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\right) \times \vec{\alpha}'(t)$$

$$K(t) = \frac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}$$

En nuestro caso:

$\vec{\alpha}(t) = (t, t, t^2) \rightarrow \alpha(0) = (0,0,0)$

$\vec{\alpha}'(t) = (1, 1, 2t) \rightarrow \alpha'(0) = (1, 1, 0)$

$\vec{\alpha}''(t) = (0, 0, 2) \rightarrow \alpha''(0) = (0, 0, 2)$

Con lo cual el vector $\vec{n}$ normal a la curva

$\vec{n}$ tiene la dirección de

$$\left((1,1,0)\times(0,0,2)\right)\times(1,1,0) =$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \times (1,1,0) =$$

$$= (2,-2,0)\times(1,1,0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (0,0,4)$$

Con lo cual

$$\vec{n} = \frac{1}{4}(0,0,4) = (0,0,1)$$

$$k(0) = \frac{\|\vec{\alpha}'(0)\times\vec{\alpha}''(0)\|}{\|\vec{\alpha}'(0)\|^3} = \frac{\|(2,-2,0)\|}{\|(1,1,0)\|^3} = \frac{\sqrt{8}}{(\sqrt{2})^3} = 1$$

Por consiguiente el vector de curvatura es

$$\vec{k} = k\,\vec{n} = (0,0,1)$$

Por otro lado, en $\alpha(0) = (0,0,0) = \vec{x}(0,0)$ vector normal de la superficie es

Recordar que

$$\vec{N}(u,v) = \frac{1}{\sqrt{(4uv+1)^2+(2u-1)^2+(-2v+1)^2}} \left((4uv+1), (2u-1), (-2v-1)\right)$$

$$\vec{N}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$$

La proyección de $\vec{k}$ en la dirección de $\vec{N}$ es

$$\vec{K_n} = K_n \vec{N}$$

$$K_n = \vec{k} \cdot \vec{N} = (0,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1) =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Septiembre 2019

Sea S la superficie dada por

$$\vec{x}(u,v) = \left(u\cos(v),\ \sin(v),\ uv\right)$$

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en el punto $\vec{x}(1,0)$.

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $\vec{x}(1,0)$

c) Sea $\mathcal{C}$ la curva en la superficie S determinada si consideramos $(u(t), v(t)) = (t^2+1,\ \pi t)$ para $t \in [-1, 1]$

Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$.

No se considerará respuesta válida si se obtiene sin considerar estos vectores.

Calculamos

a) $x(u,v) = (u\cos(v), \sin(v), uv)$

$\vec{x}_u(u,v) = (\cos(v), 0, v)$

$\vec{x}_v(u,v) = (-u\sin(v), \cos(v), u)$

$$\mathrm{I}\begin{cases} E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (\cos(v), 0, v)\cdot(\cos(v), 0, 0) = \\ \qquad = \cos^2(v) + v^2 \\ F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (\cos(v), 0, v)\cdot(-u\sin(v), \cos(v), u) = \\ \qquad = uv - u\cos(v)\sin(v) \\ G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (-u\sin(v), \cos(v), u)\cdot(-u\sin(v), \cos(v), u) \\ \qquad = u^2 + \cos^2(v) + u^2\sin(v) \end{cases}$$

En particular para el punto $u=1$, $v=0$

$\vec{x}(1,0) = (1,0,0)$

$\vec{x}_u(1,0) = (1,0,0)$

$\vec{x}_v(1,0) = (0,1,1)$

$$\mathrm{I}\begin{cases} E(1,0) = (1,0,0)\cdot(1,0,0) = 1 \\ F(1,0) = (1,0,0)\,(0,1,0) = 0 \\ G(1,0) = (0,1,1)\cdot(0,1,1) = 2 \end{cases}$$

41

b) Para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental. El vector normal a la superficie

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{(1,0,0)\times(0,1,1)}{\|(1,0,0)\times(0,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0,-1,1)$$

Además

$$\vec{x}_{uu}(u,v) = (0,0,0) \rightarrow \vec{x}_{uu}(1,0) = (0,0,0)$$

$$\vec{x}_{uv}(u,v) = (-\sin(v), 0, 1) \rightarrow \vec{x}_{uv}(1,0) = (0,0,1)$$

$$\vec{x}_{vv}(u,v) = (-u\cos(v), -\sin(v), 0) \rightarrow \vec{x}_{vv}(1,0) = (-1,0,0)$$

Por tanto en $(u,v) = (1,0)$

$$e = L = \vec{x}_{uu}\cdot\vec{N} = (0,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$

$$f = M = \vec{x}_{uv}\cdot\vec{N} = (0,0,1)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g = N = \vec{x}_{vv}\cdot\vec{N} = (-1,0,0)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$

c)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "\alpha = \vec{x} \circ f"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\vec{x}"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

$$t \longmapsto \begin{pmatrix} u = t^2+1 \\ v = \pi t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x = u\cos(v) \\ y = \sin(v) \\ z = u \cdot v \end{pmatrix}$$

$$t_0 \longmapsto \begin{pmatrix} u_0 = u(t_0) \\ v_0 = v(t_0) \end{pmatrix} \cdots\cdots \begin{pmatrix} x_0 = x(u(t_0), v(t_0)) \\ y_0 = y(u(t_0), v(t_0)) \\ z_0 = z(u(t_0), v(t_0)) \end{pmatrix}$$

El vector tangente a la curva lleva la dirección de $\vec{\alpha}'(t)$

Aplicamos la regla de la cadena que dice que

$$\vec{\alpha}'(t_0) = D\alpha(t_0) = D\vec{x}(u_0, v_0) \cdot Df(t_0)$$

$$= \underset{(3 \times 2)}{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}} \cdot \underset{(2 \times 1)}{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \end{pmatrix}} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) + \frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$= u'(t)\, \vec{x}_u(u(t), v(t)) + v'(t)\, \vec{x}_v(u(t), v(t))$$

Sustituyendo en nuestro caso

$$\alpha'(t) = 2t(\cos(v), 0, v) + \pi(-u\sin(v), \cos(v), u)$$

Por ejemplo, para $t=0$

$u(0) = 1$; $v(0) = 0$

Por tanto,

$$\alpha'(0) = 0\cdot(\cos(0), 0, 0) + \pi(-\sin(0), \cos(0), 1)$$

$$= (0,0,0) + (0, \pi, 1) = (0, \pi, 1)$$

Junio de 2014

Los coeficientes de las formas fundamentales de una superficie en el punto P son

$E = 2$; $F = -1$; $G = 4$

$e = L = 1$; $f = M = 0$; $g = N = 1$

¿Cuál es la curvatura normal en la dirección $(1,-1)$?

Respuesta

$$\chi_n(h,k) = \frac{II_p(h,k)}{I_p(h,k)} = \frac{Lh^2 + 2M\,hk + Nk^2}{Eh^2 + 2Fhk + Gk^2} =$$

$$= \frac{h^2 + k^2}{2h^2 - 2hk + 4k^2} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

si $(h,k) = (1,-1)$

(h,k) es un vector del plano tangente referido a la base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$

$$\vec{W} = h\,\vec{x}_u + k\,\vec{x}_v \in T_p$$

Septiembre de 2015

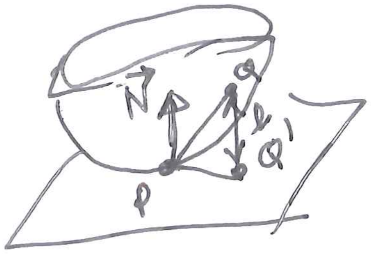
Sea S la superficie dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = u \quad ; \quad y = v \quad ; \quad z = u^2 + v^2 + uv$$

a) Determínese la ecuación del paraboloide osculador en $(0,0,0)$ a S

b) Clasifique el punto $(0,0,0)$

a) El paraboloide osculador es el paraboloide que mejor aproxima la superficie.



$$l = \frac{1}{2} \mathrm{II}_p (du\,dv) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \right)$$

El paraboloide osculador es

$$\boxed{z = e\,x^2 + 2f\,xy + g\,y^2}$$

Hay que calcular los coeficientes de la II forma fundamental en (0,0,0)

$\vec{x}_u = (1, 0, 2u+v) \to \vec{x}_u(0,0) = (1,0,0)$

$\vec{x}_v = (0, 1, 2v+u) \to \vec{x}_v(0,0) = (0,1,0)$

$$\vec{N}(0) = \frac{\vec{x}_u(0,0) \times \vec{x}_v(0,0)}{\| \vec{x}_u(0,0) \times x_v(0,0) \|} =$$

$$= \frac{(1,0,0) \times (0,1,0)}{\|(0,0,1)\|} = (0,0,1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0,0,1)$$

$\vec{x}_{uu} = (0,0,2) \to \vec{x}_{uu}(0,0) = (0,0,2)$

$\vec{x}_{uv} = (0,0,1) \to \vec{x}_{uv}(0,0) = (0,0,1)$

$\vec{x}_{vv} = (0,0,2) \to \vec{x}_{vv}(0,0) = (0,0,2)$

En el punto $\vec{x}(0,0) = (0,0,0)$

$e = L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = (0,0,2) \cdot (0,0,1) = 2$

$f = M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 1$

$g = N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = (0,0,2) \cdot (0,0,1) = 2$

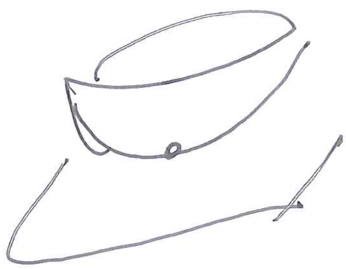
Por tanto, el paraboloide osculador es

$$z = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

para clasificarlo estudiamos el signo de

$$eg - f^2 = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$$

Es un <u>punto elíptico</u>



Junio 2016

Sea la superficie

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, u^2+u^4+v^6)$$

donde $(u,v) \in \mathbb{R}^2$

Determínense los vectores de curvatura geodésica y curvatura normal en $\vec{x}(0,0)=(0,0,0)$ para la curva $\alpha(t)=(t,0,t^2+t^4)$

Antes de nada, comprobamos que la curva $\vec{\alpha}$ es una curva en la superficie

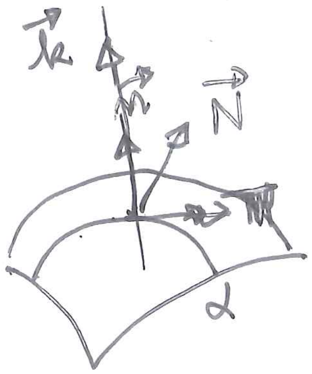
En efecto, si

$$\begin{cases} u=t \\ v=0 \end{cases} \quad \vec{x}(u,v) \text{ es}$$

se tiene que

$$\vec{x}(t,0) = (t, 0, t^2+t^4+0^6) =$$

$$= (t, 0, t^2+t^4)$$



Resulta que para $t=0$

$$\vec{\alpha}(0) = \vec{x}(0,0) = (0,0,0)$$

Calculamos el vector normal a la curva en en $\alpha(0)$ y la curvatura

Recordatorio

$\vec{n}$ tiene la dirección de $[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0)$

$$\kappa = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3}$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (1, 0, 2t + 4t^3) \Rightarrow \alpha'(0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{\alpha}''(t) = (0, 0, 2 + 12t^2) \Rightarrow \alpha''(0) = (0, 0, 2)$$

$$\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (0, -2, 0)$$

$$[\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0)] \times \vec{\alpha}'(0) = (0, -2, 0) \times (1, 0, 0)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 2)$$

por tanto $\vec{n} = \frac{1}{2}(0, 0, 2) = (0, 0, 1)$

$$\kappa(0) = \frac{\|(0, -2, 0)\|}{\|(1, 0, 0)\|^3} = \frac{2}{1} = 2$$

Por tanto $\vec{k} = \kappa \vec{n} = 2(0, 0, 1) =$

$= (0, 0, 2)$

(vector de curvatura en $(0,0,0)$)

Ahora hay que descomponer el vector $\vec{k}$ en dos componentes: una en la dirección de $\vec{N}$ (vector normal de la superficie) y otra en el plano tangente

$$\vec{k} = \vec{k_n} + \vec{k_g}$$

en la dirección de $\vec{N}$ normal a la superficie (curvatura normal)

en el plano tangente (curvatura geodésica)

Calculamos el vector $\vec{N}(0,0)$

$$\vec{N} = \frac{\vec{x_u} \times \vec{x_v}}{\|\vec{x_u} \times \vec{x_v}\|} =$$

$$\vec{x_u} = (1, 0, 2u + 4u^3) \rightarrow \vec{x_u}(0,0) = (1, 0, 0)$$

$$\vec{x_v} = (0, 1, 6v^5) \rightarrow \vec{x_v}(0,0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{N}(0,0) = (0, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1)$$

Hay que descomponer el vector

$$\vec{k} = (0,0,2) \text{ en}$$

dos componentes, una de ellas según la dirección de $\vec{N} = (0,0,1)$ y otra ortogonal a ella (en el plano tangente

$$\underset{}{\vec{k}} = \underset{\text{(en la dirección de } \vec{N})}{\vec{k}_n} + \underset{(\in \text{ plano tangente})}{\vec{k_g}}$$

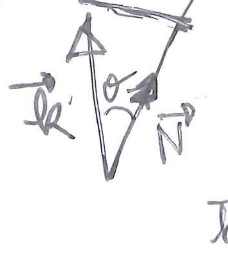
Está claro que

$$(0,0,2) = 2\underbrace{(0,0,1)}_{\vec{n}} + \underset{\substack{\uparrow \\ T_p}}{(0,0,0)}$$

$\vec{k}_n = (0,0\cdot 2)$ (curvatura normal)

$k_g = (0,0,0)$ (curvatura geodésica)

En general



$$\vec{k}_n = (\vec{k}\cdot\vec{N})\,\vec{N}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{N} = |\vec{k}|\,|\vec{N}|\cos\theta = \underline{|\vec{k}|\cos\theta}$$