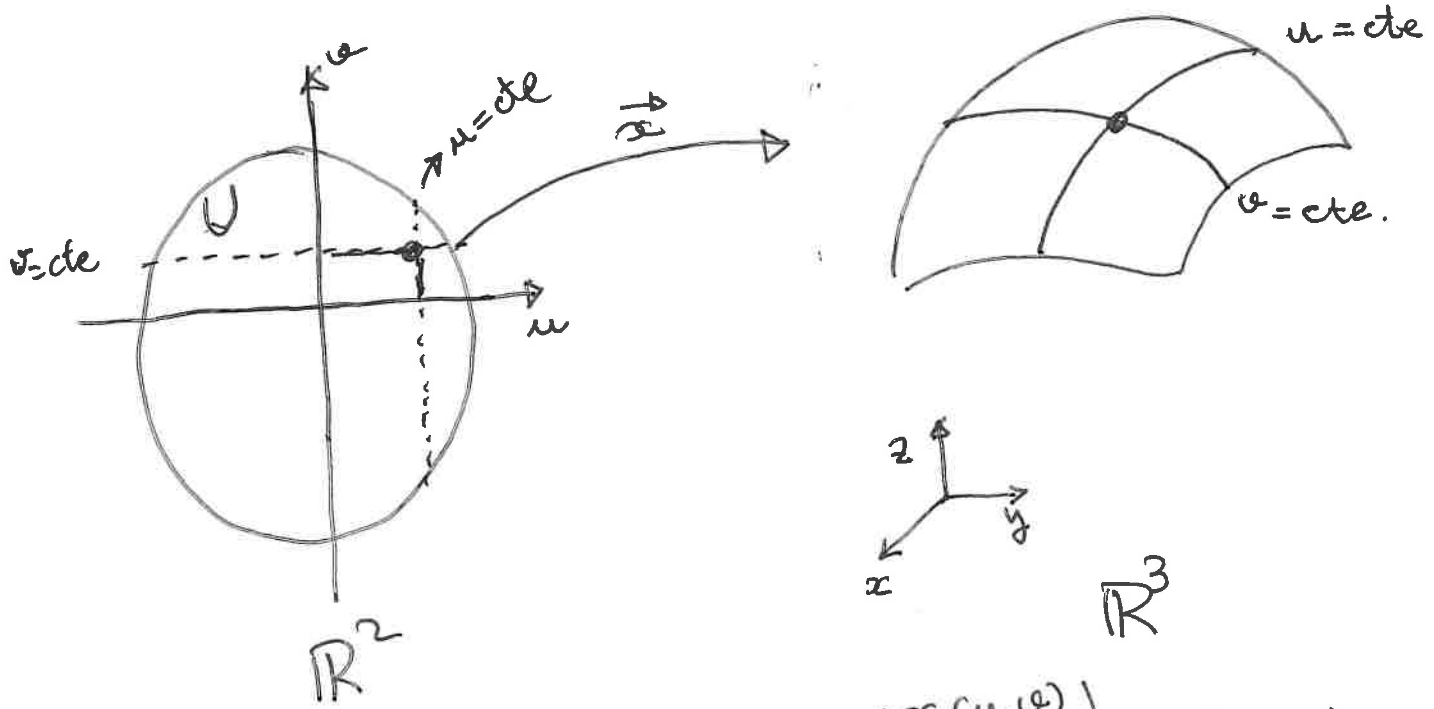
COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICAS

SUPERFICIES

(resúmen)

allave@madrid.uned.es

Concepto de superficie



$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \vec{x}(u,v)$$

- Expresión paramétrica de la superficie

$$\begin{cases} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{cases}$$

- Expresión implícita de una superficie

$$\Phi(x,y,z) = 0$$

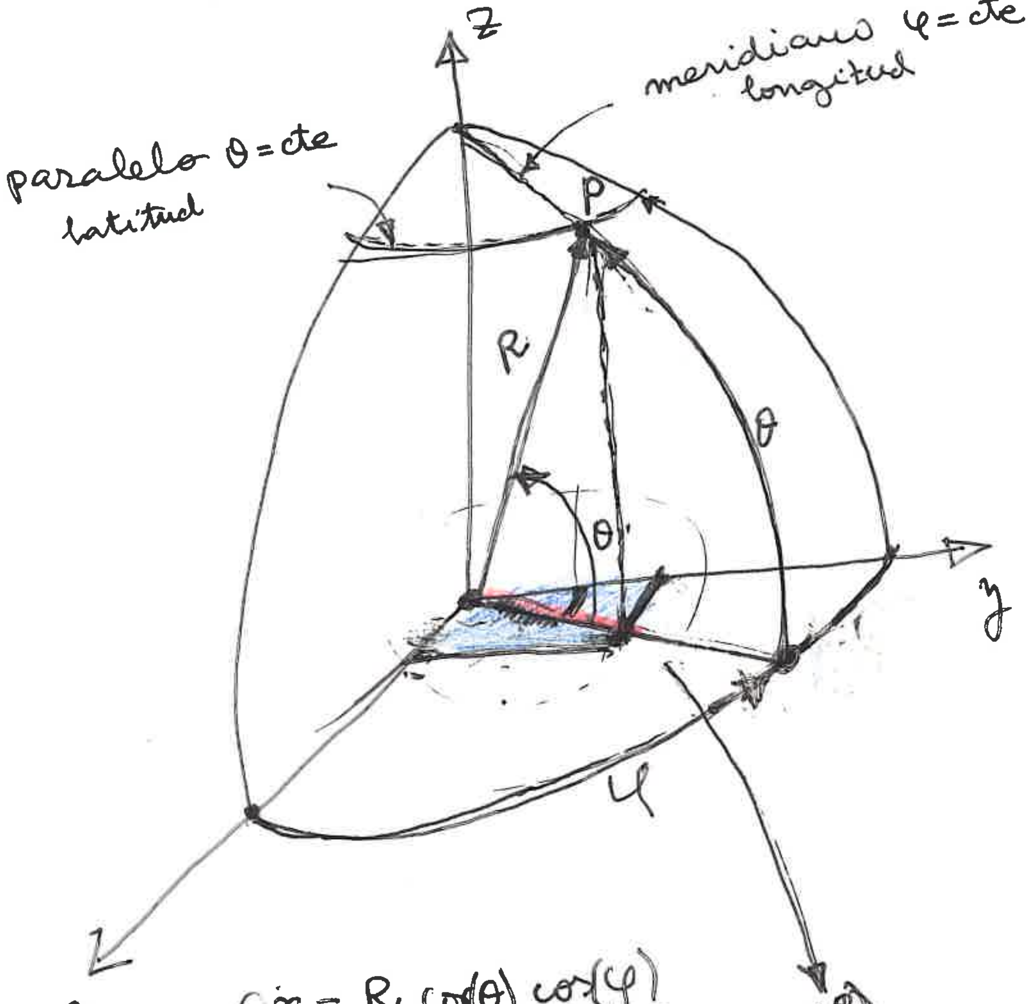
- Expresión explícita

$$z = f(x,y)$$

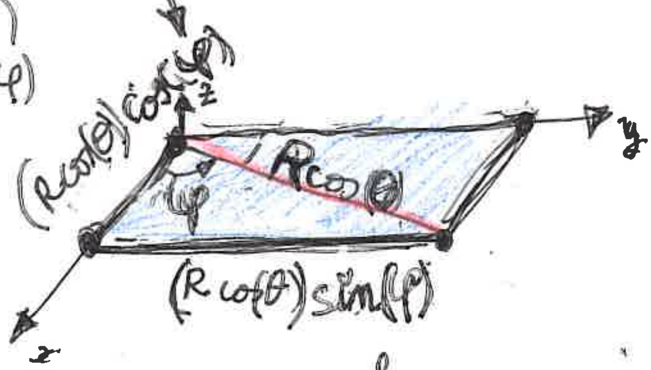
Ejemplo $\boxed{\text{Superficie esférica}}$

■ parametrización geográfica

$$\begin{cases} \varphi = \text{longitud} \\ \theta = \text{latitud} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = R\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ y = R\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ z = R\sin(\theta) \end{cases}$$



$U = [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \vec{x}(\varphi=0, \theta=0) = (R,0,0) \\ \vec{x}(\varphi=\frac{\pi}{2}; \theta=0) = (0,R,0) \\ \vec{x}(\varphi=0, \theta=\frac{\pi}{2}) = (0,0,R) \end{cases}$$

■ Forma implícita

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

■ Forma explícita

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad ; \quad z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

- Superficie regular

Definición: Sea S una superficie parametrizada $\vec{x}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, que es diferenciable al menos una vez. Sea P un punto de S con $P = \vec{x}(u_0, v_0)$

Se dice que P es REGULAR si la diferencial $d\vec{x}(u_0, v_0)$ tiene rango 2.

Es decir

$$\text{rang}\left(\vec{x}_u(u_0,v_0), \vec{x}_v(u_0,v_0)\right) = 2$$

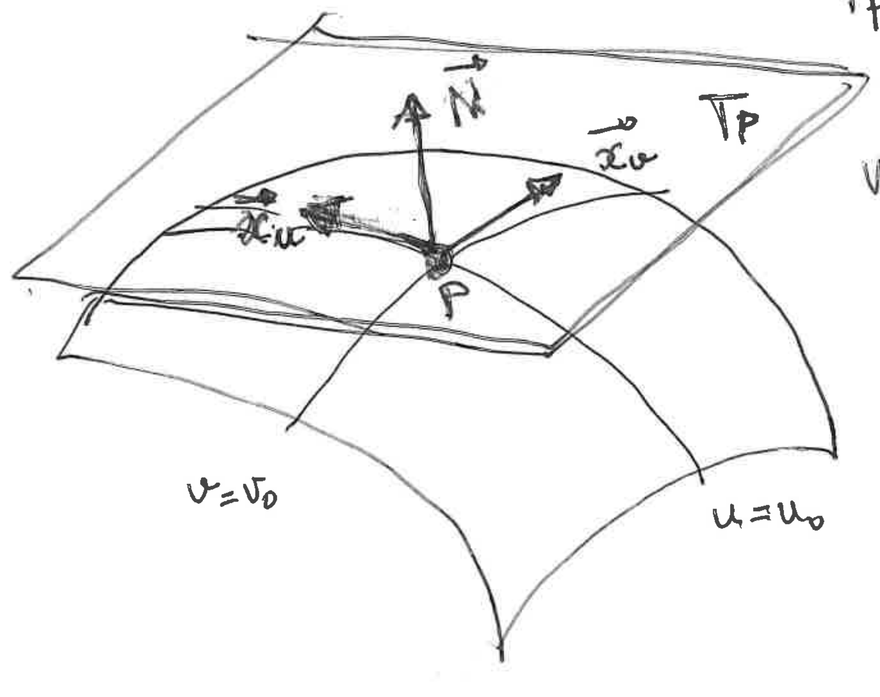
Es decir $\vec{x}_u(x_0, v_0) \times \vec{x}_v(u_0, v_0) \neq \vec{0}$

PLANO TANGENTE . VECTOR NORMAL

- En los <u>puntos regulares</u> existe plano tangente

Vectores directores del plano tangente

$$T_P = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$$



vector normal del plano tangente

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$$

(vector unitario)

otra notación

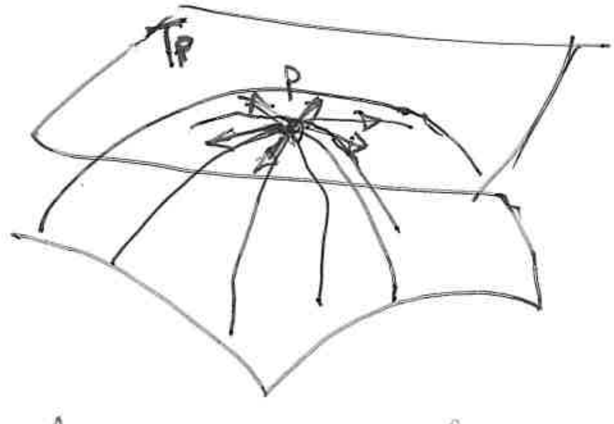
$$\begin{cases} \vec{x}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) = (x_u, y_u, z_u) \\ \vec{x}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial \theta}\right) = (x_v, y_v, z_v) \end{cases}$$

Ecuación del plano tangente:

(paramétrica) $\mathbb{X} = \vec{x}(u_0, v_0) + \lambda\, \vec{x}_u(u_0, v_0) + \mu\, \vec{x}_v(u_0, v_0)$

(implícita) $(\mathbb{X} - \vec{x}(u_0 v_0)) \cdot \vec{N} = 0$

<u>Teorema</u>: Todas las curvas de la superficie que pasan por P tienen su vector tangente en el plano tangente



$$d\vec{x}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Diferencial
matriz de la aplicación lineal que mejor aproxima
$d\vec{x}(du, dv)$

<u>Ejemplo</u> En la esfera $\vec{x}(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$

$\vec{x}_\theta = (-R\sin\theta\cos\varphi, -R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$

$\vec{x}_\varphi = (-R\cos\theta\sin\varphi, R\cos\theta\cos\varphi, 0)$

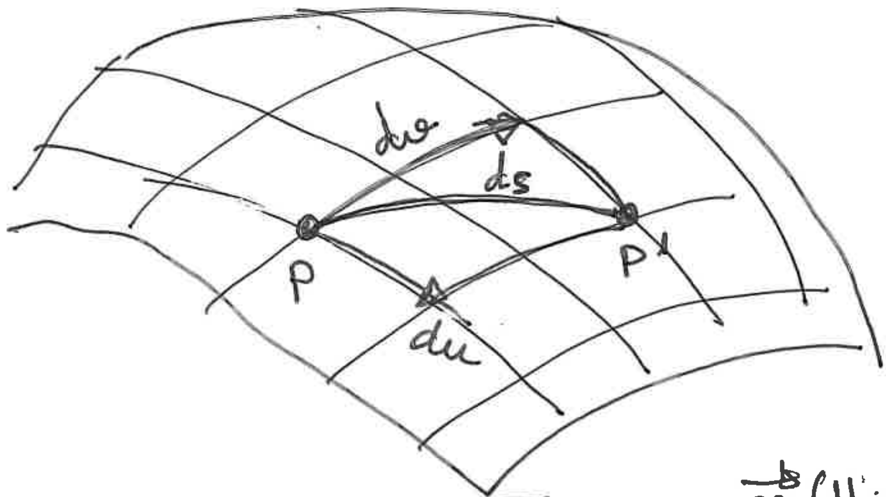
$$\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta \\ -R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (R^2\cos^2\theta\cos\varphi, R^2\cos^2\theta\sin\varphi, -R^2\sin\theta\cos\theta)$$

PRIMERA FORMA FUNDAMENTAL

Idea: La geometría local [entorno de un punto] se puede considerar como la geometría en el plano tangente con una métrica (local).

[«con medidas locales se puede conocer la naturaleza de una superficie sin necesidad de ver desde otra dimensión» Gauss]



(du, dv) son las coordenadas locales de P'

$P = \vec{x}(u, v)$

$P' = \vec{x}(u+du, v+dv)$

$PP' \approx \vec{x}(u, v) + d\vec{x}(du, dv)$

$\overrightarrow{PP'} \approx d\vec{x} = \vec{x}_u \, du + \vec{x}_v \, dv$ -

$$ds^2 = \|d\vec{x}\|^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} =$$

$$= (\vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv) \cdot (\vec{x}_u\, du + \vec{x}_v\, dv) =$$

$$= \underbrace{(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_u)}_{E}\, du^2 + 2\underbrace{(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)}_{F}\, du\,dv + \underbrace{(\vec{x}_v \cdot \vec{x}_v)}_{G}\, dv^2$$

$$= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

[función cuadrática]

Primera forma cuadrática

$$\boxed{\begin{aligned} I_p(du, dv) &= E\, du^2 + 2F\, du\,dv + G\, dv^2 \\ E &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u \\ F &= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v \\ G &= \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v \end{aligned}}$$

- I_p es una forma bilineal simétrica definida positiva, que ~~define un~~ induce una producto escalar que induce una métrica en el plano tangente
(se mide distinto, según qué dirección nos movamos)
- La I_p relaciona la métrica local con la del espacio
- Es una característica intrínseca de la superficie en un punto.
- La matriz de GRAM del producto escalar en el plano tangente es $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$

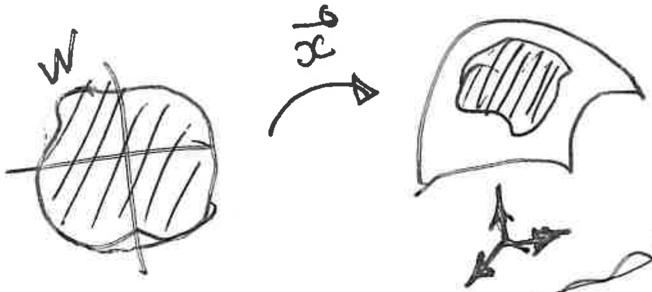
Aplicaciones de la 1ª FORMA CUADRÁTICA

- Longitud de arco de la curva sobre la superficie

$$\begin{cases} \vec{x}\,(u(t), v(t)) & \text{curva } \vec{\alpha}(t) \\ t \in [a,b] \end{cases}$$

$$\boxed{s = \int_a^b \left| \frac{d\vec{x}}{dt} \right| dt = \int_a^b \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\,\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] dt}$$

- Área de una región de la superficie



Elemento de área

$A = |\vec{x}_u||\vec{x}_v| \sin\alpha =$
$= |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| = \sqrt{EG - F^2}$

$$\Delta A = |\Delta\vec{x}_u \times \Delta\vec{x}_v| \Rightarrow dA = |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|\, du\, dv$$

$$\boxed{A = \iint_W \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv}$$

$(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{a}\times\vec{b}) =$
$= (\vec{a}\cdot\vec{a})(\vec{b}\cdot\vec{b}) - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2$
Identidad de vectores

- Ángulo formado por dos curvas coordenadas es el ángulo formado por sus dos vectores tangentes

$$\boxed{\cos(\vec{x}_u, \vec{x}_v) = \frac{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}{|\vec{x}_u||\vec{x}_v|} = \frac{\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v}{\sqrt{\vec{x}_u\cdot\vec{x}_u}\sqrt{\vec{x}_v\cdot\vec{x}_v}} = \frac{F}{\sqrt{EG}}}$$

Ejemplo: En la esfera

Considerando la parametrización geográfica

$$\begin{cases} x = R\cos\theta\cos\varphi \\ y = R\cos\theta\sin\varphi \\ z = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{x}_\theta = (-R\sin\theta\cos\varphi,\ -R\sin\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta)$$

$$\vec{x}_\varphi = (-R\cos\theta\sin\varphi,\ R\cos\theta\cos\varphi,\ 0)$$

$$E = \vec{x}_\theta \cdot \vec{x}_\theta = R^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + R^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\theta =$$

$$= R^2\left[\sin^2\theta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\theta\right] = R^2\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] = R^2$$

$$F = \vec{x}_\theta \cdot \vec{x}_\varphi = R^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi - R^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi + 0 = 0$$

$$G = \vec{x}_\varphi \cdot \vec{x}_\varphi = R^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + R^2\cos^2\theta\cos^2\varphi + 0 =$$

$$= R^2\cos^2\theta\left[\sin^2\theta + \cos^2\theta\right] = R^2\cos^2\theta$$

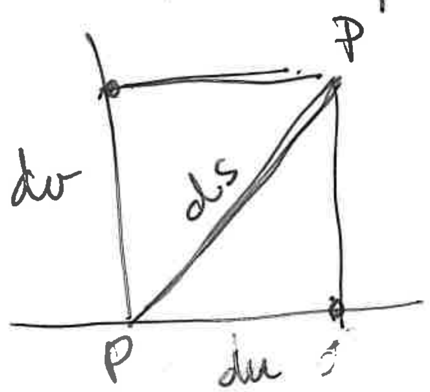
comentario: Como $F = 0$ las curvas coordenadas son ortogonales en todos los puntos

$$\mathrm{I}(d\theta, d\varphi) = (d\theta, d\varphi)\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d\theta \\ d\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= R^2(d\theta)^2 + R^2\cos^2\theta\,(d\varphi)^2$$

Comentario: La primera forma fundamental es una generalización del teorema de Pitágoras

En un plano



$$ds^2 = du^2 + dv^2$$

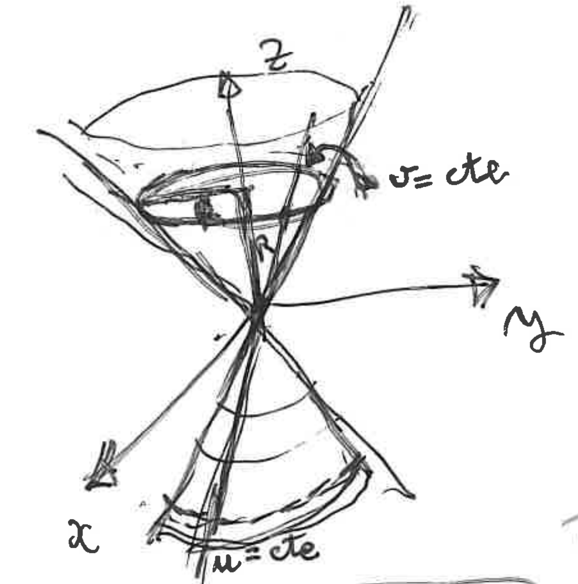
en una superficie cualquiera

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

Ejemplo: Aplicaciones de la 1ª Forma

Consideremos un cono parametrizado

$$\vec{x}(u,v) = \left(v\cos(u),\ v\sin(u),\ v\right)$$



$u \in [0, 2\pi)$
$v \in \mathbb{R}$

Cuando $v = R$ (constante) se obtiene una circunferencia de radio R en el eje Z a altura R en el eje Z

Cuando $u = c$ (constante) se obtiene una recta que pasa por el origen de vector director $(\cos(c), \sin(c), 1)$

$(x,y,z) = v\,(\cos(c), \sin(c), 1)$ $v \in \mathbb{R}$

[CURVAS PARAMÉTRICAS]

Este cono en implícitas

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

¿Cuál es la primera forma fundamental en un punto?

$$\begin{cases} \vec{x}_u = (-v\sin(u),\ v\cos(u),\ 0) \\ \vec{x}_v = (\cos(u),\ \sin(u),\ 1) \end{cases}$$ Vectores directores del plano tangente

$$\begin{cases} E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = v^2\sin^2(u) + v^2\cos^2 u + 0 = v^2 \\ F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = -v\sin(u)\cos(u) + v\sin(u)\cos(u) + 0 = 0 \\ G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = \cos^2(u) + \sin^2(u) + 1 = 2 \end{cases}$$ Coeficientes I

$$ds^2 = \|d\vec{x}\|^2 = (du\ dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$
$$= v^2 du^2 + 0\,du\,dv + 2\,dv^2$$
$$= v^2 (du)^2 + 2(dv)^2$$

12

¿Cuál es la longitud de la curva $\begin{cases} u = t \\ v = 1 \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$?

$\vec{x}(t,1) = (\cos(t), \sin(t), 1)$

[Circunferencia de radio 1] El resultado tiene que ser 2π

$$l_{ab} = \int_a^b ds = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{x}}{dt} \right\| dt =$$

$$= \int_a^b \left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right]^{1/2} dt$$

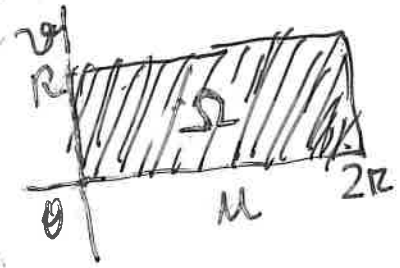
particularizando

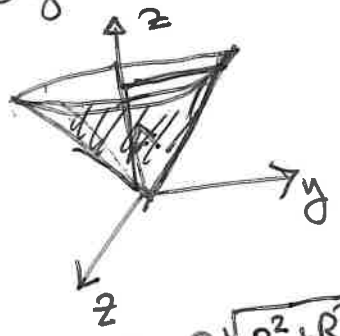
$$l = \int_0^{2\pi} [\underbrace{1}_{E} \cdot \underbrace{1}_{\left(\frac{du}{dt}\right)^2} + 2 \cdot \underbrace{0}_{F} \cdot \underbrace{1}_{\frac{du}{dt}} \cdot \underbrace{0}_{\frac{dv}{dt}} + \underbrace{2}_{G} \cdot \underbrace{0}_{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}]^{1/2} = \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 (du)^2 + 2(dv)^2} =$$

$\left\{ \begin{array}{l} v = 1 \Rightarrow dv = 0 \\ u = t \Rightarrow du = dt \end{array} \right.$

$$= \int_0^{2\pi} 1\, dt = t \Big]_0^{2\pi} = 2\pi$$

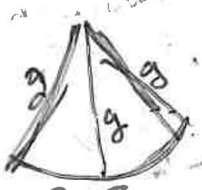
¿Cuál es el área lateral de un cono correspondiente a la superficie $\Omega = [0, 2\pi) \times [0, R)$?





ÁREA LATERAL del CONO

$g = \sqrt{h^2 + R^2}$



$\boxed{A = \pi R g}$

[Si $h = R \Rightarrow g = \sqrt{2} R$]

(que sabemos que es $A = \pi R \sqrt{R^2 + R^2} = \pi \sqrt{2} R^2$)

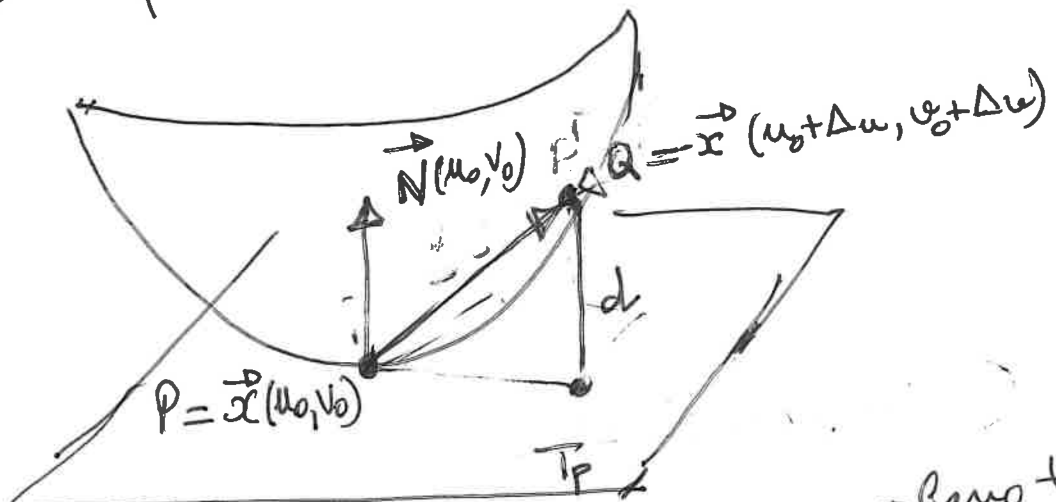
$$A = \iint_\Omega \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv =$$

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{v^2 2 - 0^2}\, du\, dv = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{2} v\, du \right) dv$$

$$= \int_0^R 2\pi \sqrt{2}\, v\, dv = \frac{2\sqrt{2}\pi\, v^2}{2} \Big]_0^R = \sqrt{2} \pi R^2$$

SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

La segunda forma fundamental aparece cuando deseamos medir lo que se separa la superficie del plano tangente

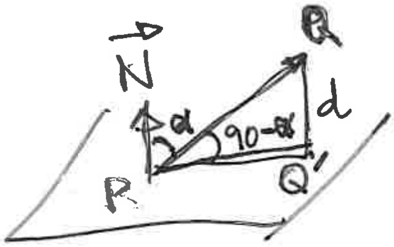


¿Cuál es la distancia de Q al plano tangente, T_P?

$$d = \text{distancia}(Q, T_P)$$

¿Cómo se mide la distancia de un punto a un plano?

$\vec{N}$ = vector normal unitario a T, $|\vec{N}|=1$



$$d = |\vec{PQ}| \sin(90-\alpha) =$$
$$= |\vec{PQ}| \cos\alpha = |\vec{PQ}|\,|\vec{N}| \cos\alpha$$
$$= \vec{PQ} \cdot \vec{N}$$
$$=$$

Calculamos las coordenadas de Q próximo a P

$$Q = \vec{x}(u+du, v+dv) \approx \underbrace{\vec{x}(u,v)}_{P} + d\vec{x}(du,dv) +$$
$$+ \frac{1}{2} d^2\vec{x}(du,dv) + \ldots o(du^2+dv^2)$$

términos de orden pequeño

(desarrollo de Taylor)

En donde

$$\begin{cases} d\vec{x}(du,dv) = \vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv = \\ d^2\vec{x}(du,dv) = \vec{x}_{uu}(du)^2 + 2\,\vec{x}_{uv}\,du\,dv + \vec{x}_{vv}(dv)^2 = \\ \qquad = (du,dv)\begin{pmatrix} x_{uu} & x_{uv} \\ x_{uv} & x_{vv} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \end{cases}$$

Hessiana

$$\vec{PQ} \approx \vec{x}(u+du, v+dv) - \vec{x}(u,v) =$$

$$= \underbrace{\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv}_{d\vec{x}} + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\vec{x}_{uu}(du)^2 + 2\vec{x}_{uv}\,du\,dv + \vec{x}_{vv}(dv)^2\right)}_{d^2\vec{x}}$$

$$d = \vec{PQ}\cdot\vec{N} = \underbrace{(\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv)\cdot\vec{N}}_{0} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\vec{x}_{uu}\cdot\vec{N}(du)^2 + 2\,\vec{x}_{uv}\cdot\vec{N}\,du\,dv + \vec{x}_{vv}\cdot\vec{N}(dv)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{II}(du,dv) = \frac{1}{2}\underbrace{d^2\vec{x}\cdot\vec{N}}_{\mathrm{II}(du,dv)}$$

$\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv$ es un vector del plano tangente. Por tanto, $(\vec{x}_u\,du + \vec{x}_v\,dv)\cdot\vec{N} = 0$

Si llamamos

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \vec{x}_{uu}\cdot\vec{N} \\ f &= \vec{x}_{uv}\cdot\vec{N} \\ g &= \vec{x}_{vv}\cdot\vec{N} \end{aligned}}$$

En algunos textos
$e = L$
$f = M$
$g = N$

La segunda forma fundamental es

$$\boxed{\mathrm{II}(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2}$$

$$\mathrm{II}(du\,dv) = d^2\vec{x}\cdot\vec{N}$$

Otras expresiones de la segunda forma fundamental

$$\boxed{\begin{aligned} e &= \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_u \cdot \vec{N}_u \\ f &= \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_v \cdot \vec{N}_u = -\vec{x}_u \cdot \vec{N}_v \\ g &= \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_v \cdot \vec{N}_v \end{aligned}}$$

La demostración, de estas fórmulas son consecuencia de que

$$\vec{x}_u \cdot \vec{N} = 0 \quad ; \quad \vec{x}_v \cdot \vec{N} = 0$$

vector del plano tangente

vector del plano tangente

Derivando estas expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{x}_u \cdot \vec{N}) = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} + \vec{x}_u \vec{N}_u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{x}_u \cdot \vec{N}) = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} + \vec{x}_u \vec{N}_v = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial u}(\vec{x}_v \cdot \vec{N}) = \vec{x}_{vu} \cdot \vec{N} + \vec{x}_v \cdot \vec{N}_u = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial v}(\vec{x}_v \cdot \vec{N}) = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} + \vec{x}_v \cdot \vec{N}_v = 0$$

Otra forma

determinante

$$e = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = \frac{[\vec{x}_{uu}, \vec{x}_u, \vec{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$f = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = \frac{[\vec{x}_{uv}, \vec{x}_u, \vec{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$g = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = \frac{[\vec{x}_{vv}, \vec{x}_u, \vec{x}_v]}{\sqrt{EG - F^2}}$$

<u>Ejemplo</u> En la esfera parametrizada geográficamente

$$\vec{x}(\theta,\varphi) = (R\cos\theta\cos\varphi, R\cos\theta\sin\varphi, R\sin\theta)$$

Calculamos el vector normal

$$\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R\sin\theta\cos\varphi & -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta \\ -R\cos\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-R^2\cos^2\theta\cos\varphi, R^2\cos^2\theta\sin\varphi, -R^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi - R^2\cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right)$$

$$= \left(-R^2\cos^2\theta\cos\varphi, R^2\cos^2\theta\sin\varphi, -R^2\sin\theta\cos\varphi\right)$$

Como $|\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi| = R^2\cos\theta$

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi}{|\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi|} = (-\cos\theta\cos\varphi, -\cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta) = -\vec{x}$$

$$\vec{x}_{\theta\theta} = (-R\cos\theta\cos\varphi, -R\cos\theta\sin\varphi, -R\sin\theta)$$

$$\vec{x}_{\theta\varphi} = (R\sin\theta\sin\varphi, -R\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\vec{x}_{\varphi\varphi} = (-R\cos\theta\cos\varphi, -R\cos\theta\sin\varphi, 0)$$

$$\begin{aligned} L &= e = \vec{N}\cdot\vec{x}_{\theta\theta} = R \\ M &= f = \vec{N}\cdot\vec{x}_{\theta\varphi} = 0 \\ N &= g = \vec{N}\cdot\vec{x}_{\varphi\varphi} = R\cos^2\theta \end{aligned}$$

$$\mathrm{II}(d\theta,d\varphi)=(d\theta,d\varphi)\begin{pmatrix}R & 0\\ 0 & R\cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d\theta\\ d\varphi\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{II}(d\theta,d\varphi)=R(d\theta)^2+R\cos^2\theta\,(d\varphi)^2$$

—

En una esfera en todos los puntos

$$eg-f^2=R\,(R\cos^2\theta)=R^2\cos^2\theta>0$$

$\boxed{\mathrm{II}(\alpha,\beta)=e\alpha^2+g\beta^2+2f\alpha\beta=\lambda_1\alpha^2+\lambda_2\beta^2}$ diagonalizado

$\boxed{\text{Recordatorio}}$: Clasificación de formas cuadráticas: Decir si es definida positiva, definida negativa, semidefinida positiva, semidefinida negativa o indefinida]

(Para clasificar una forma cuadrática se reduce a suma de cuadrados, sin términos cruzados)

Si una forma cuadrática tiene matriz $A=\begin{pmatrix}e & f\\ f & g\end{pmatrix}$ y se diagonaliza $\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$ [λ_1,λ_2 autovalores]

$$\det(A)=eg-f^2=\lambda_1\cdot\lambda_2$$

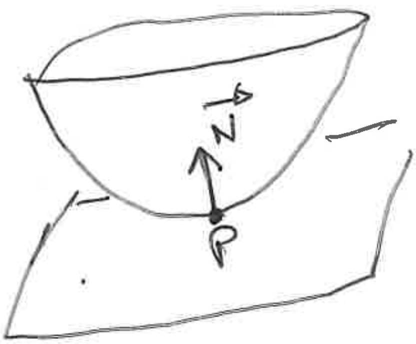
- Si λ_1 y λ_2 tienen el mismo signo, $\lambda_1\cdot\lambda_2=eg-f^2>0$ y la forma cuadrática es definida (positiva o negativa)
- Si λ_1 y λ_2 tienen signos distintos, $\lambda_1\lambda_2=eg-f^2<0$ y la forma cuadrática es indefinida
- Si uno de los autovalores es cero, es semidefinida $\lambda_1\cdot\lambda_2=eg-f^2=0$

CLASIFICACIÓN de LOS PUNTOS DE UNA SUPERFICIE

PUNTOS ELÍPTICOS

[II es definida (positiva o negativa)]

los puntos de la superficie están del mismo lado del plano tangente

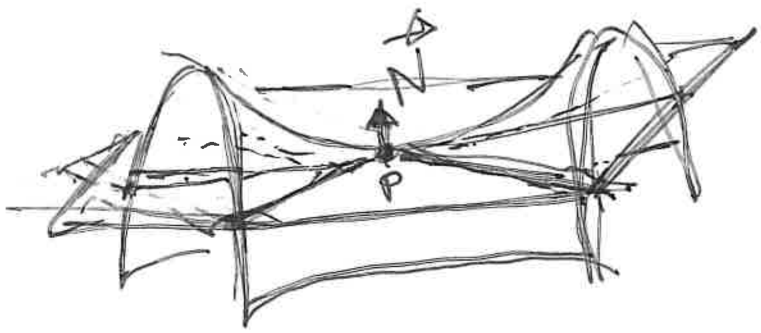


$$eg - f^2 > 0$$

PUNTOS HIPERBÓLICOS

(II es indefinida)

La superficie atraviesa el plano tangente en las "direcciones asintóticas"
hay punto de un lado y punto de otro



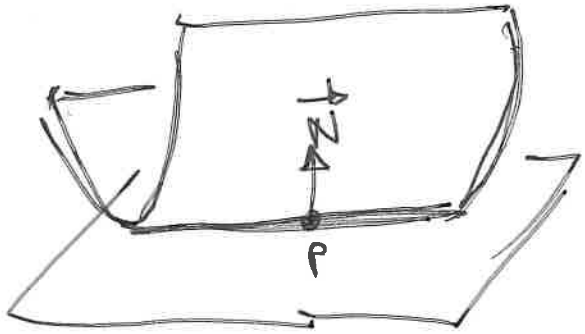
$$eg - f^2 < 0$$

PUNTOS PARABÓLICOS

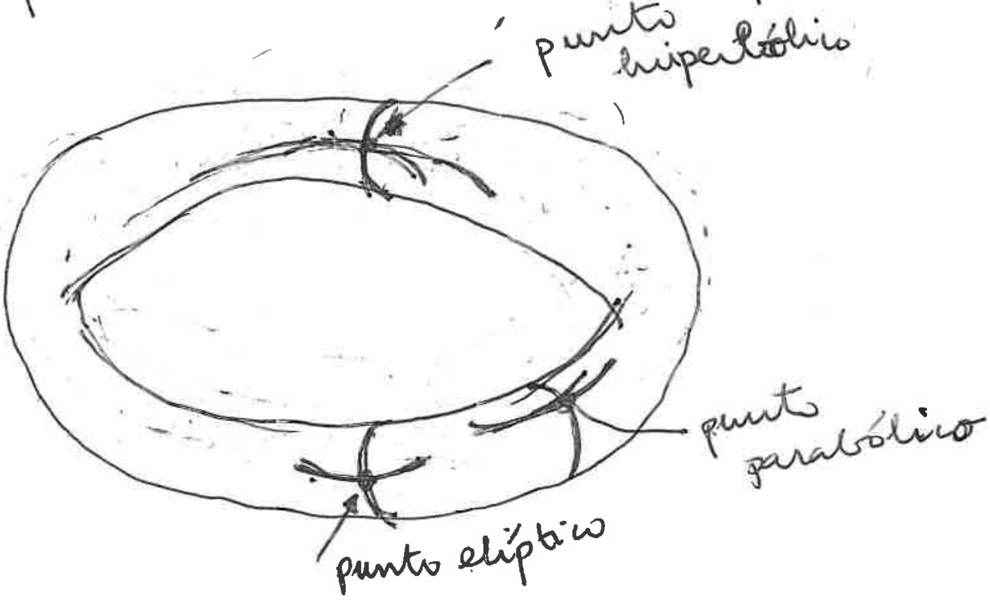
(II semidefinida)

$$eg - f^2 = 0$$

$$e^2 + g^2 + f^2 \neq 0$$



En el toro hay puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos

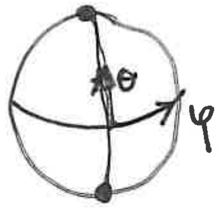


En la esfera:

$$e = R \; ; \; f = 0 ; \; g = R\cos^2\theta$$

$$eg - f^2 = R R\cos^2\theta = R^2\cos^2\theta > 0$$

(salvo cuando $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\theta = \frac{3\pi}{2}$, que hacen $\cos\theta = 0$)



$$eg - f^2 > 0$$

los puntos son elípticos

Esos puntos son los polos y son puntos singulares de la parametrización geográfica. Para esos puntos $\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi = \vec{0}$

$$\vec{x}_\theta \times \vec{x}_\varphi = (R^2\cos^2\theta\cos\varphi, R^2\cos^2\theta\sin\varphi, -R^2\sin\theta\cos\theta)$$

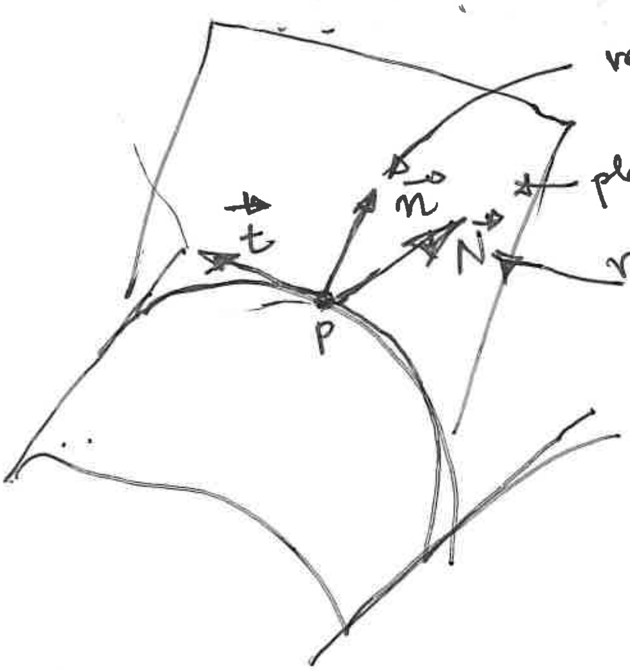
CURVATURA NORMAL Y CURVATURA GEODÉSICA

Consideremos una curva C contenida en una superficie S.

La superficie tiene ecuación $\vec{x}(u,v)$

La curva C parametrizada por la longitud de arco

$$\vec{\alpha}(s) = \vec{x}(u(s), v(s))$$



vector normal de la curva $\vec{n}$

plano osculador de la curva $\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$

vector normal de la superficie $\vec{N}$ (unitario)

Recordatorio:

v. tangente: $\vec{t}(s) = \vec{x}'(s)$ es vector unitario $\|\vec{x}'(s)\| = 1$

v. curvatura: $\vec{k}(s) = \dfrac{d\vec{t}(s)}{ds} = \dfrac{d^2\vec{x}(s)}{ds^2} = k(s)\,\vec{n}$ (tiene la dirección de $\vec{n}$)

← curvatura

Si usamos una parametrización cualquiera:

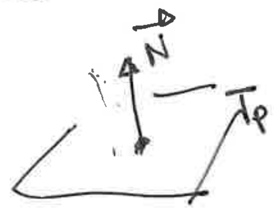
- El vector $\vec{n}$, normal de la curva, tiene la dirección de $[\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)] \times \vec{\alpha}'(t)$

La curvatura $K(t) = \dfrac{\|\vec{\alpha}'(t) \times \vec{\alpha}''(t)\|}{\|\vec{\alpha}'(t)\|^3}$

El vector de curvatura se descompone en dos componentes:

- Una en la dirección de $\vec{N}$ (v. normal del plano tangente)

- Otra en el plano tangente



$$\underbrace{\vec{k}}_{\text{vector de curvatura}} = \underbrace{\vec{k_n}}_{\text{curvatura normal (en la dirección de } \vec{N})} + \underbrace{\vec{k_g}}_{\text{curvatura geodésica (en el plano tangente)}}$$

Se llama $\begin{cases} \text{curvatura normal } k_n = \|\vec{k_n}\| \\ \text{curvatura geodésica } k_g = \|\vec{k_g}\| \end{cases}$

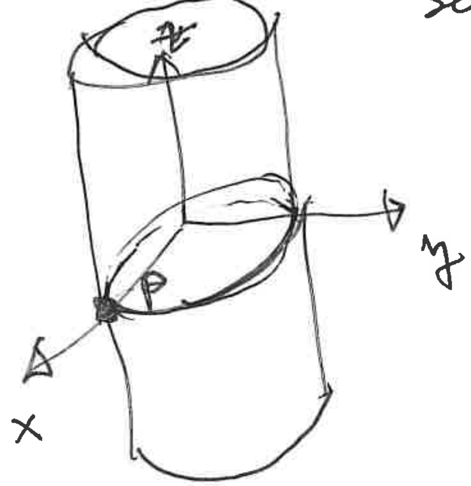
¿Cómo se calcula la curvatura normal y la curvatura geodésica?

Ejemplo:

Consideramos el cilindro

$$\vec{x}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Sea $P = (1,0,0) = \vec{x}(0,0)$



Consideremos la curva en el cilindo en P

$$\vec{\alpha}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0)$$

$P = \vec{\alpha}(0)$

Vector normal a la superficie en $P=(1,0,0)$

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} = \frac{(\cos(u), \sin(u), 0)}{1} = (\cos(u)\ \sin(u), 0)$$

$\vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0)$

$\vec{x}_v = (0,0,1)$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin(u) & \cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

En particular, para $u=0,\ v=0$

$\vec{x}_u = (0,1,0)$; $\vec{x}_v = (0,0,1)$; $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$

$\Rightarrow \vec{N} = (1,0,0)$

El vector de curvatura (teniendo en cuenta que la curva está parametrizada por la longitud de arco)

(23)

$$\vec{k}(0) = \frac{d^2 \vec{\alpha}(0)}{ds} = (-1,0,0)$$

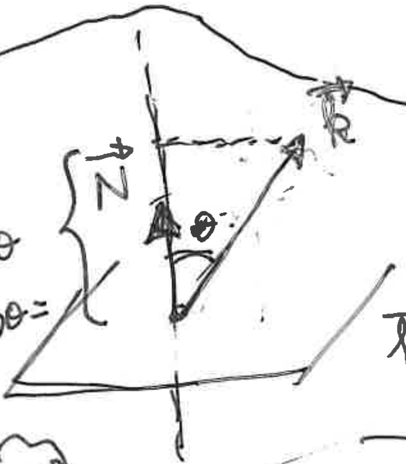
$$\frac{d\vec{\alpha}}{ds} = (-\sin(s), \cos(s), 0)$$
$$\frac{d^2\vec{\alpha}}{ds} = (-\cos(s), -\sin(s), 0)$$

Ahora vamos a descomponer el vector $\vec{k}(0)$ en dos componentes: una en el plano tangente y otra en la direción de $\vec{N}$

$$\vec{k}(0) = \underbrace{\vec{k}_n(0)}_{\text{en la direción de } \vec{N}} + \underbrace{\vec{k}_g(0)}_{\text{en el plano Tangente}}$$

Plano tangente $T_p = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle =$
$= \langle (0,1,0), (0,0,1) \rangle$

$$\vec{N} = \langle (1,0,0) \rangle$$



$k_n = |\vec{k}| \cos\theta$
$= |\vec{k}||\vec{N}| \cos\theta =$
$= \vec{x} \cdot \vec{N}$

$|\vec{N}| = 1$

¿Cómo se calcula la proyección de un vector?

$$\vec{k}_n = k_n \vec{N} = (\vec{k} \cdot \vec{N}) \vec{N}$$

$$k_n = \vec{k} \cdot \vec{N} = (-1,0,0) \cdot (1,0,0) = -1$$

por tanto $\vec{k}_n(0) = k_n \vec{N} = -1\ (1,0,0) = (-1,0,0)$

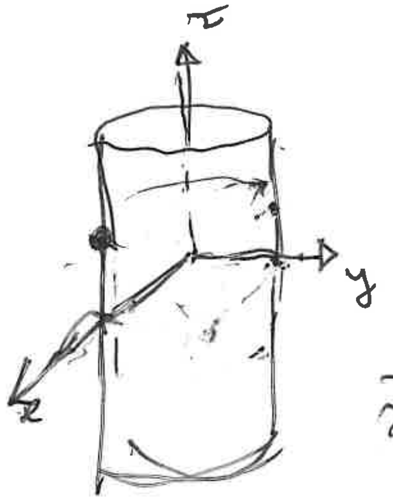
La curvatura geodésica en este punto es $k_g = 0$

$$\vec{k}_g = \vec{k} - \vec{k}_n = (0,0,0)$$

Veamos ahora cómo se calculan los vectores de curvatura usando una parametrización cualquiera

Ejemplo Consideremos el cilindro

$$\vec{x}(u,v) = (\cos(u), \sin(u), v)$$



consideremos la curva contenida en el cilindro haciendo

$$\begin{cases} u = t \\ v = \cos(t) + \sin(t) \end{cases}$$

resulta la curva

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(u(t), v(t)) = (\cos t, \sin t, \cos t + \sin t)$$

Esta curva es una elipse

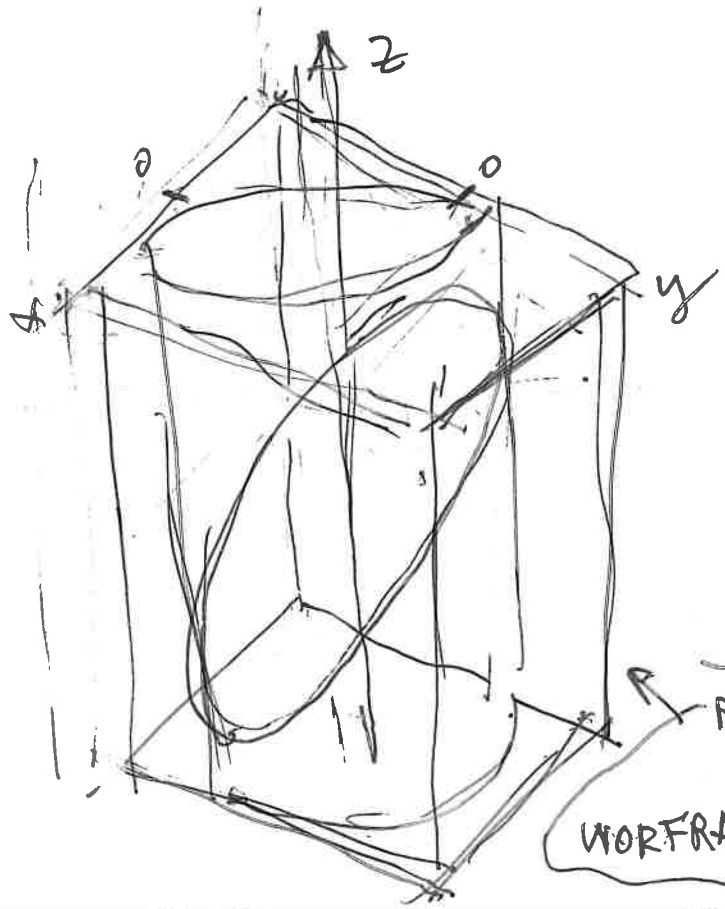
algunos puntos

$$\vec{x}(0) = (1, 0, 1)$$

$$\vec{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1, 1)$$

$$\vec{x}(\pi) = (-1, 0, -1)$$

$$\vec{x}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1, -1)$$



Buscaremos la curvatura normal y la curvatura geodésica en el punto

$$\vec{x}(0) = \vec{x}(u(0), v(0)) = \vec{x}(0,1) = (1,0,1)$$

PLOT [x = cos(t), y = sin(t), z = cos(t)+sin(t)]

WORFRAN ALPHA

Calculamos los vectores directores del plano tangente y el vector normal

$\vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0) \to \vec{x}_u(0,1) = (0,1,0)$

$\vec{x}_v = (0,0,1) \to \vec{x}_v(0,1) = (0,0,1)$

$\vec{N}(0,1) = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|} = (1,0,0)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,0,0)$

Plano tangente $T_p = \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$

vamos a calcular el vector $\vec{k}$, de curvatura de $\vec{x}(t)$ en $\vec{x}(0)$

Recordamos que en una parametrización cualquiera de una curva $\vec{x}(t)$

$$k(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3} \quad \text{(curvatura)}$$

$\vec{n}$ (vector normal de la curva) tiene la dirección de

$[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$

El vector de curvatura es:

$\vec{k} = k(t)\,\vec{n}$

En ~~nuestro~~ caso

$\vec{x}(t) = (\cos(t), \sin(t), \cos(t)+\sin(t))$

$\vec{x}'(t) = (-\sin t, \cos(t), -\sin t + \cos(t)) \to \vec{x}'(0) = (0,1,1)$

$\vec{x}''(t) = (-\cos t, -\sin(t), -\cos t - \sin(t)) \Rightarrow \vec{x}''(0) = (-1,0,-1)$

El vector que tiene la misma dirección que $\vec{n}$ (vector normal a la curva) es

$[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)] \times \vec{x}'(0) = [(0,1,1) \times (-1,0,-1)] \times (0,1,1) =$

$$= (-1,-1,1) \times (0,1,1) = (-2,1,-1)$$

por consiguiente, el vector normal a la curva

$$\vec{n} = \frac{1}{\|(-2,1,-1)\|}(-2,1,-1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,-1)$$

$\vec{x}' \times \vec{x}'' =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,-1,1)$$

$(x' \times x'') \times x' =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,1,-1)$$

La curvatura es

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|}{\|x'(0)\|^3} =$$

$$= \frac{\|(-1,-1,1)\|}{\|(0,1,1)\|^3} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^3} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

El vector de curvatura es $\vec{k} = \kappa \vec{n}$

$$\vec{k}(0) = \kappa \vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}(-2,1,-1)$$

$$= \frac{1}{4}(-2,1,-1) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$$

Ahora vamos a descomponer el vector de curvatura

$$\vec{k} = \underbrace{\vec{k}_n}_{\substack{\text{curvatura normal} \\ \text{en la dirección de } \vec{N} \\ \text{(normal de la superficie)}}} + \underbrace{\vec{k}_g}_{\substack{\text{curvatura geodésica} \\ \text{(en el plano tangente)}}}$$

$$\vec{k_n} = (\vec{k} \cdot \vec{N})\vec{N} =$$

$$= \left[\frac{1}{4}(-2,1,-1)\right] \cdot (1,0,0)\Big] (1,0,0)$$

$$= -\frac{1}{2}\ (1,0,0) =$$

$$= \left(-\frac{1}{2},0,0\right) = -\frac{1}{2}(1,0,0)$$

La curvatura geodésica es

$$\vec{k_g} = \vec{k} - \vec{k_n} = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2},0,0\right) =$$

$$= \left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right) \in \text{Plano tangente}$$

$$T = \langle \vec{x_u}, \vec{x_v} \rangle = \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle$$

La curvatura normal es k_n tal que

$$\vec{k_n} = k_n \cdot \vec{N}$$

En nuestro caso $k_n = -\frac{1}{2}$

$$\underbrace{\left(-\frac{1}{2},0,0\right)}_{\vec{k_n}} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{k_n}\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{N}}$$

Cálculo de la curvatura normal de una curva de la superficie

$\vec{x}(t) = \vec{x}(u(t), v(t))$

$$k_n(t) = \frac{e\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2f\left(\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}\right) + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} =$$

$$= \frac{II\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)}{I\left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}\right)}$$

Ejemplo en el caso anterior

La superficie era el cilindro

$\vec{x}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$

para $u(t) = t$; $v(t) = \cos(t) + \sin(t)$

$\vec{x}(t) = (\cos t, \sin(t), \cos t + \sin t)$

Tenemos que $\frac{du}{dt} = 1$; $\frac{dv}{dt} = -\sin(t) + \cos(t)$

En el punto $t = 0$

$\frac{du}{dt}(0) = 1$ $\quad \frac{dv}{dt}(0) = 0 + 1 = 1$

Los coeficientes de la primera forma fundamental en el punto $(1, 0, 1)$

$\vec{x}_u(0, 1) = (0, 1, 0)$

$\vec{x}_v(0, 1) = (0, 0, 1)$

$N(0, 1) = (1, 0, 0)$

$$\begin{cases} \vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0) \\ \vec{x}_v = (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|x_u \times x_v|} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\cos(u), \sin(u), 0)$$

Primera forma fundamental en $(u=0, v=1)$

$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 1$

$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$

$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0,0,1) \cdot (0,0,1)\ 1$

La segunda forma fundamental en $(u=0, v=1)$

$e = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_u \cdot \vec{N}_u$

$f = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_v \cdot \vec{N}_u = -\vec{x}_u \cdot \vec{N}_v$

$g = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = -\vec{x}_v \cdot \vec{N}_v$

En nuestro caso $\vec{N}(0,1) = (1,0,0)$

$$\begin{cases} \vec{x}_u = (-\sin(u), \cos(u), 0) \\ \vec{x}_{uu} = (-\cos(u), -\sin(u), 0) \rightarrow \vec{x}_{uu}(0,1) = (-1,0,0) \\ \vec{x}_v = (0,0,1) \\ \vec{x}_{vv} = (0,0,0) \rightarrow \vec{x}_{vv}(0,1) = (0,0,0) \\ \vec{x}_{uv} = (0,0,0) \rightarrow \vec{x}_{uv}(0,1) = (0,0,0) \end{cases}$$

$e = (-1,0,0) \cdot (1,0,0) = -1$

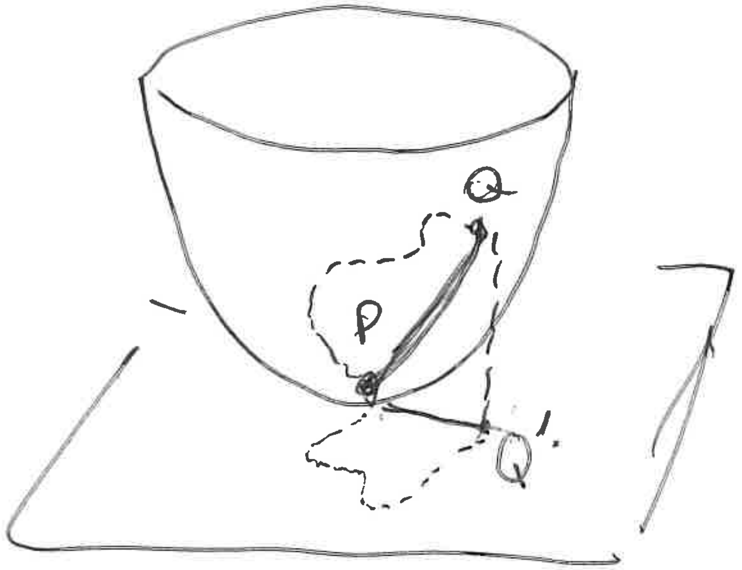
$f = (0,0,0) \cdot (1,0,0) = 0$

$g = (0,0,0) \cdot (1,0,0) = 0$

$$K_n(0) = \frac{e\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2f\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + g\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\left(\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}\right) + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} = \frac{-1\cdot 1^2 + 0\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 1^2}{1\cdot 1^2 + 0\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1^2} =$$

$$= \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$ (como teníamos antes)

Idea de lo que son las curvas geodésicas sobre una superficie



El camino más ~~corto~~ entre P y Q sobre la superficie se proyecta sobre el plano tangente como una recta

La curva "geodésica" tiene curvatura geodésica = 0

Teorema de Meusnier

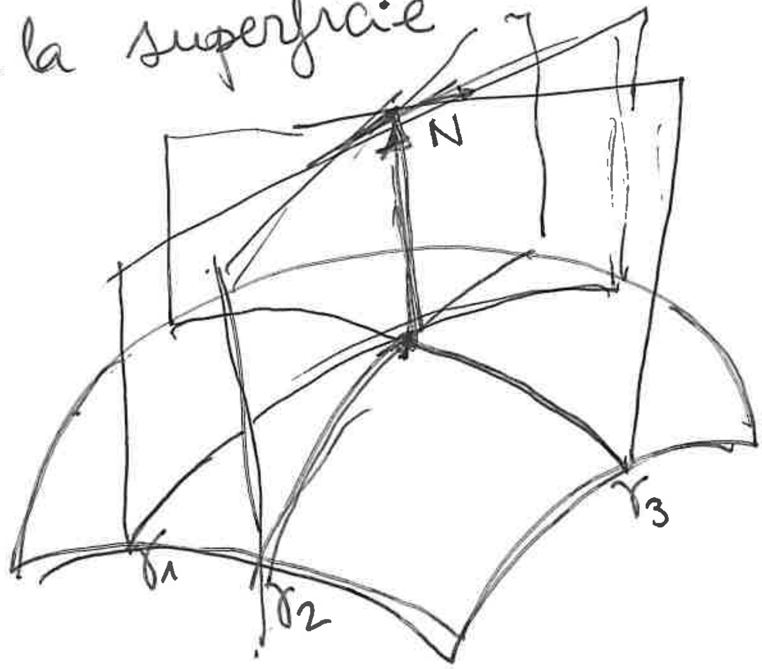
Todas las curvas de una superficie con la misma dirección tangente tienen la misma curvatura normal

---

Por eso tiene sentido estudiar las curvaturas normales según las direcciones del plano tangente

SECCIONES NORMALES

Consideremos un haz de planos que tiene como eje la dirección normal de la superficie



Cada uno de los planos del haz corta a la superficie en una curva γ

Estas curvas sólo tienen curvatura normal (El vector normal de la curva plana) $\vec{n} = \vec{N}$ (el vector normal de la superficie)

$$K_n(h,k) = \frac{\mathrm{II}(h,k)}{\mathrm{I}(h,k)}$$

donde el vector $\vec{v} = (h,k)$ es la dirección de la tangente a la curva

$$\vec{v} = (u'(t), v'(t))$$

Direcciones principales

Si consideramos las curvaturas normales según los distintas direcciones del plano tangente, habrá direcciones que hagan la curvatura normal máxima y mínima. Estas direcciones se llaman DIRECCIONES PRINCIPALES y los valores de estas curvaturas se llaman curvaturas principales.

[se obtienen haciendo $\frac{\partial k_n}{\partial u} = 0$ $\frac{\partial k_n}{\partial v} = 0$]

Las direcciones principales $\vec{v} = (h, k)$ verifican

$$\begin{vmatrix} k^2 & -hk & h^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

Si se considera $\vec{v} = (1, m)$

$$\begin{vmatrix} m^2 & -m & 1 \\ E & F & K \\ e & f & h \end{vmatrix} = 0$$

Si se considera $\vec{v} = (\cos\theta, \sin\theta)$

$$\begin{vmatrix} \sin^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

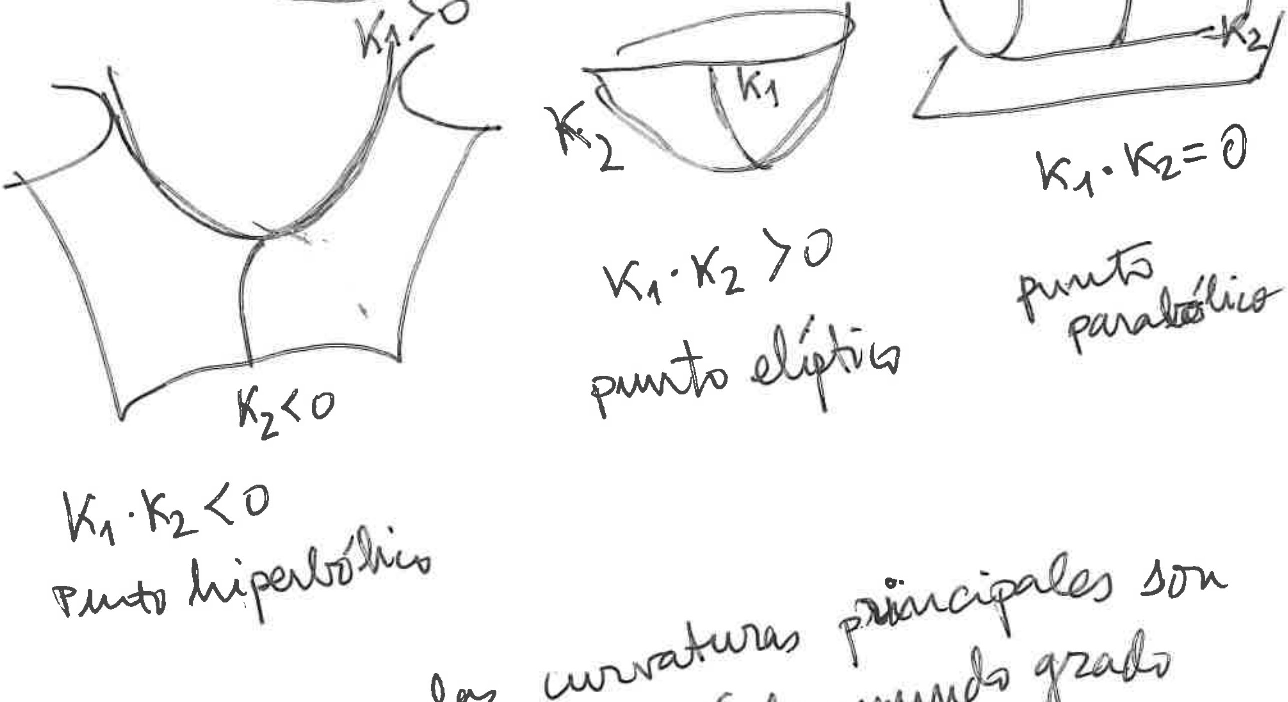
CURVATURA MEDIA Y CURVATURA TOTAL

Si K_1, K_2 son las curvaturas principales (máximo y mínimo), se llama

$$\boxed{K_m = \text{curvatura media} = \frac{K_1+K_2}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{Eg-2Ff+Ge}{EG-F^2}}$$

[Es importante para determinar superficies mínimas como las pompas de jabón]

$$\boxed{K_t = \text{curvatura total o gaussiana} = K_1 \cdot K_2 = \frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}}$$



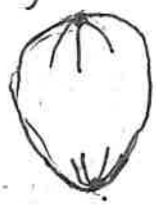
Si K_1 y K_2 son las curvaturas principales son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}\lambda^2 - \left\{\begin{vmatrix} E & f \\ F & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F & e \\ G & f \end{vmatrix}\right\}\lambda + \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(EG-F^2)\lambda^2 - (Eg-2Ff+Ge)\lambda + (eg-f^2) = 0}$$

Definiciónes importantes

PUNTO UMBILICAL es un punto en el que las curvaturas normales son iguales en todas las direcciones



Por ejemplo los puntos de una esfera.

Teorema: Si todos los puntos de una superficie son umbilicales, es un plano o una esfera

Teorema: En los puntos umbilicos

$$\frac{e}{E} = \frac{f}{F} = \frac{g}{G} = \text{constante}$$

LÍNEAS DE CURVATURA

Una curva γ sobre una superficie S se dice que es una línea de curvatura si la recta tangente en cada uno de sus puntos coincide con una dirección principal (curvaturas normales máxima y mínima)

La ecuación diferencial que verifican las líneas de curvatura es

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\,du\,dv + (fG - gF)(dv)^2 = 0$$

Por cada punto no umbilical pasan dos líneas de curvatura que ~~son~~ ortogonales..

LÍNEAS ASINTÓTICAS.

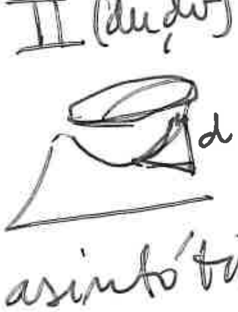
Una curva sobre una superficie se llama <u>línea asintótica</u> si su curvatura normal en cada punto es cero lo que supone que

$$\boxed{e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g(dv)^2 = 0} \Leftrightarrow \boxed{e\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2f\frac{du}{dv} + e = 0} \quad [*]$$

- En un punto elíptico $(eg - f^2 < 0)$ <u>no</u> existen asintóticas. [[*] no tiene solución]
- En un punto hiperbólico $(eg - f^2 > 0)$ existen dos líneas asintóticas. [ya que $K_1 < 0 < K_2$ y K pasa por 0].
  [*] tiene dos soluciones de la forma:
  $A\,du + B\,dv = 0$; $C\,du + D\,dv = 0$
- En un punto parabólico $(eg - f^2 = 0)$ existe una única línea asintótica [[*] tiene una solución doble]

$$(A\,du + B\,dv)^2 = 0$$

En una línea asintótica $\mathrm{II}(du, dv) = 0$



como $d = \frac{1}{2}\,\mathrm{II}(du, dv)$

a lo largo de una línea asintótica la distancia al plano tangente es cero

Ejemplo: Determinar las líneas asintóticas de la superficie dada por la ecuación

$$z^2 = x^2 - y^2$$

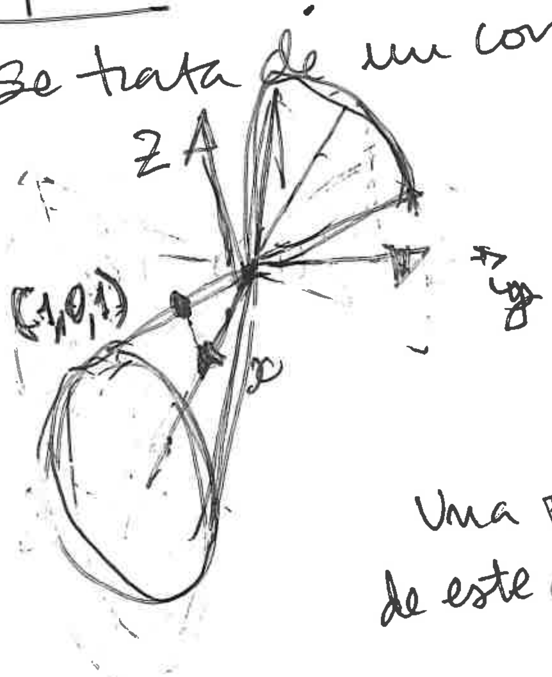
en el punto $(1,0,1)$

Respuesta

Se trata de un cono

$$z^2 + y^2 = x^2$$

Las secciones son circunferencias según el plano $x = cte$



Una posible parametrización de este cono es

$$\vec{x}(u,v) = \left(u, v, \sqrt{u^2 - v^2}\right)$$

los coeficientes de las formas fundamentales

$$\vec{x}_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right) \Rightarrow \vec{x}_u(1,0) = (1, 0, 1)$$

$$\vec{x}_v = \left(0, 1, -\frac{v}{\sqrt{u^2 - v^2}}\right) \Rightarrow \vec{x}_v(1,0) = (0, 1, 0)$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

$$\vec{x}_u(1,0) \times \vec{x}_v(1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

$$\vec{x}_{uu} = \left(0,\ 0,\ -\frac{v^2}{(u^2-v^2)^{3/2}}\right) \to \vec{x}_{uu}(1,0) = (0,0,0)$$

$$\vec{x}_{uv} = \left(0,0\ \ \frac{uv}{(u^2-v^2)^{3/2}}\right) \to \vec{x}_{uv}(1,0) = (0,0,0)$$

$$\vec{x}_{vv} = \left(0,\ 0,\ -\frac{u^2}{(u^2-v^2)^{3/2}}\right) \to \vec{x}_{vv}(1,0) = (0,0,-1)$$

$$\mathrm{I}\begin{cases} E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1,0,1)\cdot(1,0,1) = 2 \\ F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1,0,1)\cdot(0,1,0) = 0 \\ G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0,1,0)\cdot(0,1,0) = 1 \end{cases}$$

$$\mathrm{II}\begin{cases} e = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = (0,0,0)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) = 0 \\ f = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = (0,0,0)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) = 0 \\ g = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = (0,0,-1)\cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Las ecuaciones diferenciales de las líneas asintóticas

$$e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g\,(dv)^2 = 0$$

en nuestro caso

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(dv)^2 = 0 \Rightarrow dv = 0 \Rightarrow v = \overset{\text{constante}}{C}$$

como se busca la línea asintótica que pasa por $(1,0,1) = \vec{x}(1,0)$ se cumple $v=0$

La línea asintótica es $\vec{x}(u,0,\sqrt{u^2-0}) = (u,0,u)$

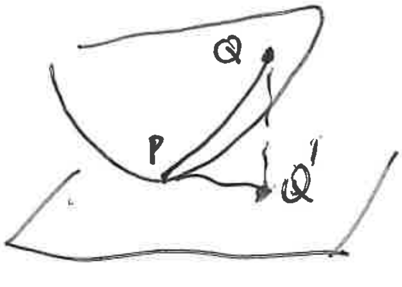
LÍNEA GEODÉSICA

Una curva sobre una superficie es una línea geodésica si su curvatura geodésica en cada punto es cero

En una línea geodésica la normal a la curva lleva la misma dirección que la normal a la superficie

Intuitivamente, si cortamos una superficie usando un cuchillo, siguiendo una línea geodésica, no necesitamos inclinar el cuchillo

Si andamos por una geodésica a velocidad constante no sufrimos aceleración



La proyección sobre el plano tangente es un segmento (localmente)

$$\left[\vec{k}, \vec{N}, \vec{t}\right] = 0$$

curvatura — normal a la superficie — tangente

Indicatriz de Dupin

La indicatriz de Dupin de la superficie S en un punto P al siguiente subconjunto del plano tangente

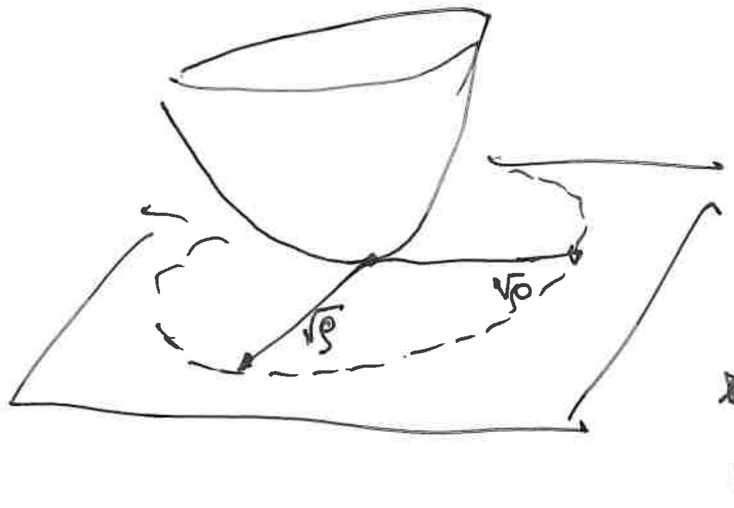
$$D(P,S) = \{\vec{w} \in T_p \text{ tal que } II_p(\vec{w},\vec{w}) = \pm 1\}.$$

Es la unión de dos cónicas (alguna de las cuales puede ser vacía o degenerada)

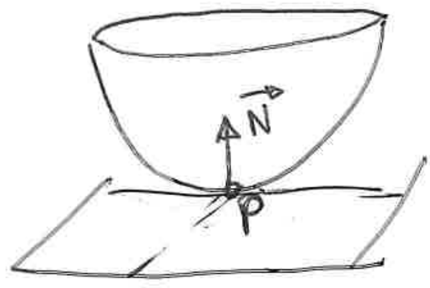
La ecuación reducida de la indicatriz de Dupin es

$$K_1 x^2 + K_2 y^2 = \pm 1$$

El radio de la indicatriz de Dupin en cualquier dirección es $\sqrt{\rho_{\vec{w}}}$, ~~la~~ raíz cuadrada del radio de curvatura

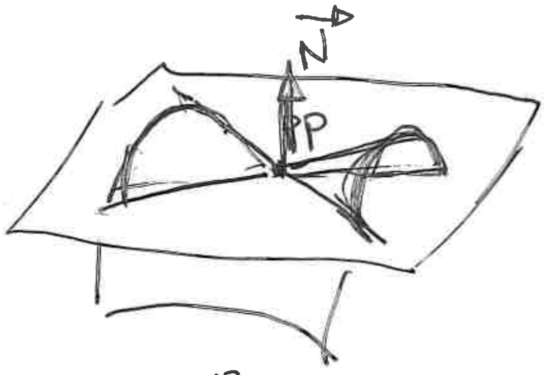


- ~~Si~~ el punto es hiperbólico son dos hipérbolas que comparten asíntotas
- Si el punto es parabólico son dos rectas paralelas
- Si el punto es elíptico es una elipse (una circunferencia si es un punto umbílico)
- Si es un punto plano es el conjunto vacío



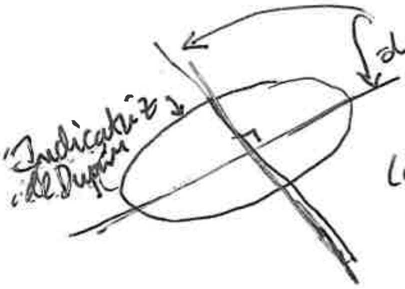
$eg - f^2 > 0$

$\boxed{\text{punto elíptico}}$



$eg - f^2 < 0$

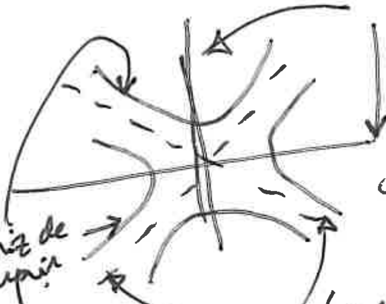
punto hiperbólico



direcciones principales (de máxima y mínima curvatura)

No tiene direcciones asintóticas

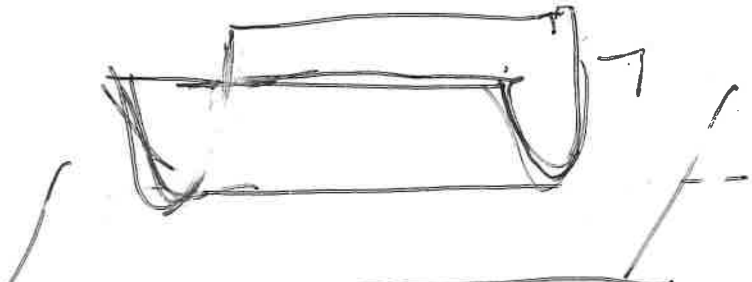
Tiene dos direcciones asintóticas (puntos que están en el plano tangente)



direcciones principales

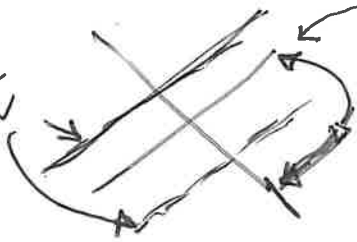
Indicatriz de Dupin

líneas asintóticas



$eg - f^2 = 0$

$L^2 + M^2 + N^2 \neq 0$



tiene una dirección asintótica

Indicatriz de Dupin

líneas principales

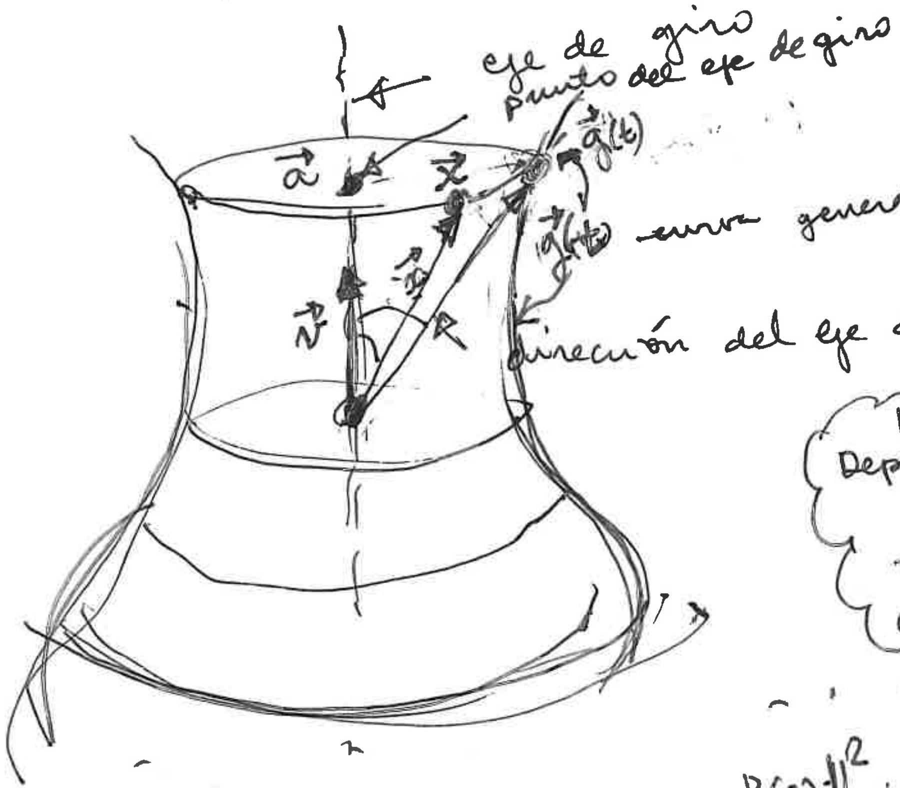
Teorema egregio de GAUSS

Supongamos una superficie que es de un material flexible, pero inextensible — por ejemplo una hoja de estaño — de modo que podemos combarla de distintas formas, sin estirarla ni romperla. Durante este proceso las curvaturas principales cambian, como probó Gauss, pero el producto $k_1 \cdot k_2$ permanecerá inalterable.

Este resultado fundamental prueba que dos superficies con diferentes curvaturas de Gauss son inherentemente distintas entre sí, consistiendo esa diferencia en el hecho de que si las deformamos de todas las formas posibles, sin estirarlas ni romperlas, nunca podremos superponer una sobre otra. Por ejemplo, un segmento de la superficie de una esfera nunca podrá deformarse de tal forma que se adapte a un plano o la superficie de una esfera a otra de distinto radio.

SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

■ Superficies de revolución



Definida por:

■ Eje de giro $a(\lambda)=\lambda\vec{v}$

■ Curva generatriz $\vec{g}(t)$

La superficie Depende de dos parámetros $S(u,t)$ verificando estas condiciones

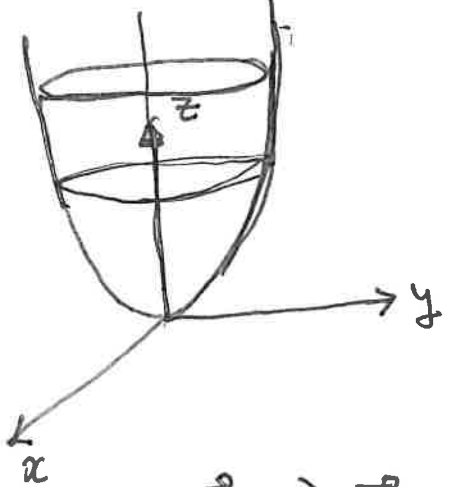
$$\begin{cases} \|\vec{x}-\vec{a}(\lambda)\|^2=\|\vec{g}(t)-\vec{a}(\lambda)\|^2 & [1] \\ \vec{x}\cdot\vec{v}=\vec{g}(t)\cdot\vec{v} & [2] \end{cases}$$

[1] $\Leftrightarrow d(\vec{x},\vec{a})=d(\vec{g}(t),\vec{a})$

[2] $\Leftrightarrow$ áng $(\vec{x},\vec{v})=$ áng $(\vec{g}(t),\vec{v})$ ya que $|\vec{x}|=|\vec{g}(t)|$

Ejemplo Determinar las ecuaciones de la superficie generada al girar la curva dada por $\begin{cases} z=y^2 \\ x=0 \end{cases}$ alrededor del eje z

Respuesta



Es una paraboloide

[2] es equivalente a $(\vec{x}-\vec{g}(u))\cdot\vec{v}=0$

Un punto variable del eje de giro es

$$\vec{a}(\lambda) = \lambda(0,0,1) = (0,0,\lambda)$$

Una parametrización de la curva generatriz

$$\vec{g}(t) = (0, t, t^2)$$

Un punto de la superficie de revolución que buscamos es $\vec{x} = (x, y, z)$ que verifica

$$\begin{cases} [1] & (x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-\lambda)^2 = (0-0)^2 + (u-0)^2 + (u^2-\lambda)^2 \\ [2] & (x-0, y-t, z-t^2) \cdot (0,0,1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 = t^2 + \underbrace{(t^2-\lambda)^2}_{0} \\ z - t^2 = 0 \end{cases}$$

Como $z = t^2$, $\lambda = t^2 = z$

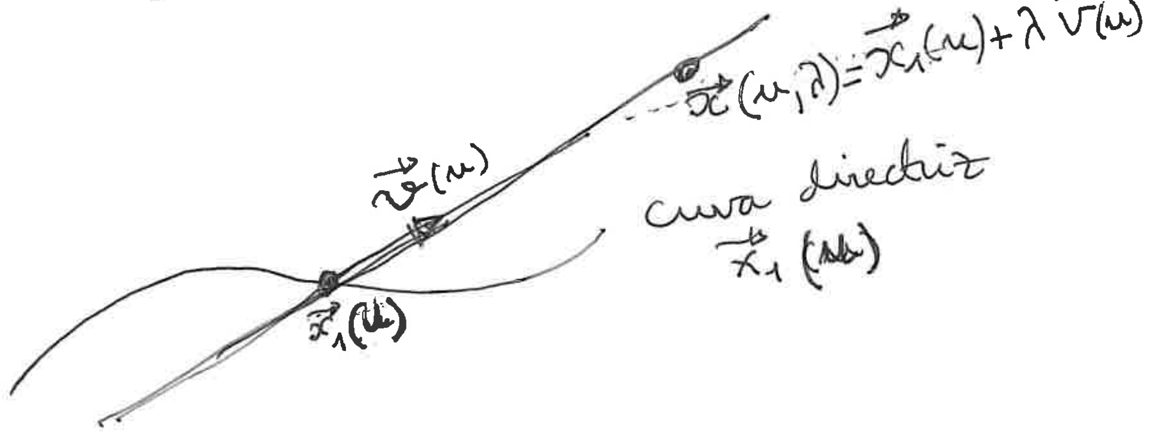
$$x^2 + y^2 + (z-\lambda)^2 = z$$

$$\boxed{x^2 + y^2 = z}$$ en forma paramétrica

$$S \equiv \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \Rightarrow x(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$$

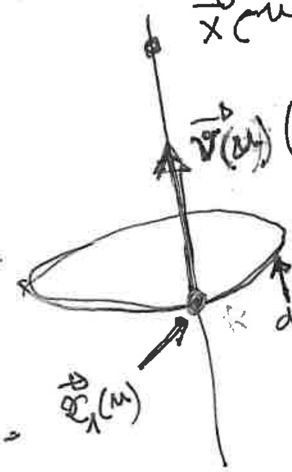
SUPERFICIES REGLADAS

Definición: Una superficie es REGLADA si por cada uno de sus puntos pasa (al menos) una recta que está contenida en la superficie



Ejemplo: Un cilindro

$\vec{x}(u) = \vec{x}_1(u) + \lambda \vec{v}(u$



$\vec{v}(u)$ $(\cos(u), \sin(u), 1)$

$\vec{x}_1(u) = (\cos(u), \sin(u), 0)$

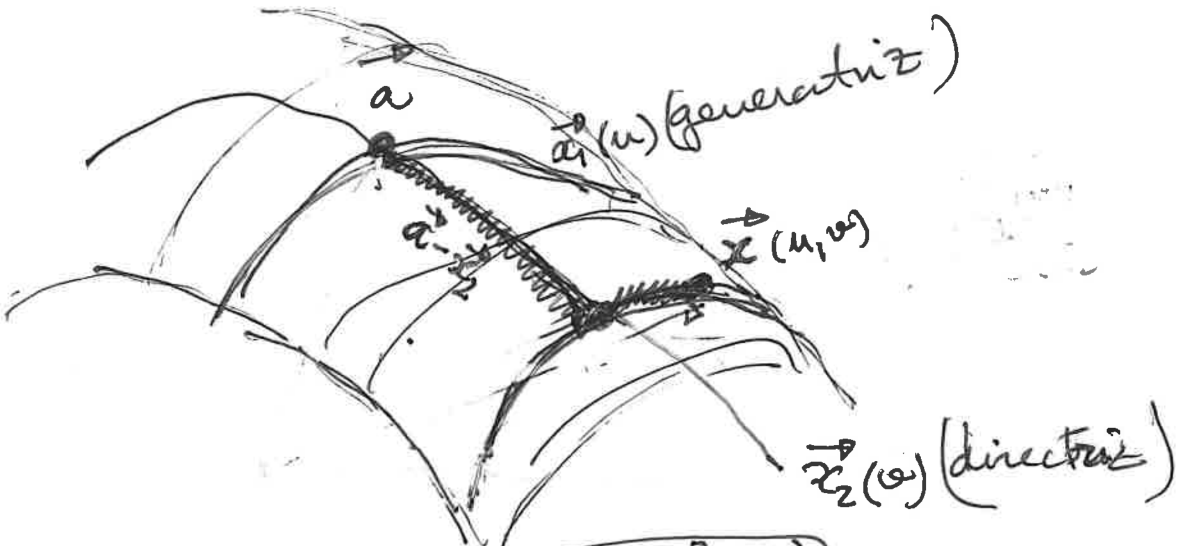
$$\vec{x}(u,\lambda) = (\cos(u), \sin(u), 0) + \lambda(\cos(u), \sin(u), 1)$$

$$= [(1+\lambda)\cos(u), (1+\lambda)\sin(u), \lambda)$$

SUPERFICIES DE TRASLACIÓN

Las superficies de traslación están generadas al trasladar una curva generatriz $\vec{x}_1(u)$ moviéndose paralelamente a sí misma, a lo largo de otra curva $\vec{x}_2(v)$ que se llama directriz con la que tienen un punto común

$$\vec{a} = \vec{x}_1(u_0) = \vec{x}_2(v_0)$$



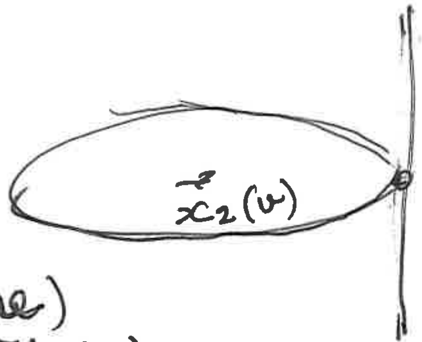
$$\boxed{\vec{x}(u,v) = \vec{x}_2(v) + \vec{x}_1(u) - \vec{x}_1(u_0)}$$

<u>Ejemplo</u>: Determinar la superficie de traslación que se obtiene al trasladar la recta $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ a lo largo de la elipse

$$\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 1 \end{cases}$$

Respuesta

La generatriz es la elipse $\begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{1^2}+\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1 \end{cases}$



$\vec{x}_2(v) = \begin{cases} x=\cos(v) \\ y=\frac{1}{2}\sin(v) \\ z=0 \end{cases}$

$\vec{x}_2(v) = \left(\cos(v), \frac{1}{2}\sin(v), 0\right)$

La directriz es la recta $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$

$\vec{x}_1(u) = \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=u \end{cases}$

El punto común de estas dos curvas es

$\left.\begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \\ x^2+4y^2=1 \end{cases}\right\} \Rightarrow (1,0,0) = \vec{a}$

La ecuación del "cilindro elíptico" es

$\vec{x}(u,v) = \left(\cos(v), \frac{1}{2}\sin(v), 0\right) + (1,0,u) - (1,0,0)$

$$\boxed{\vec{x}(u,v) = \left(\cos(v), \frac{1}{2}\sin(v), u\right)}$$

ENVOLVENTE de UNA FAMILIA de SUPERFICIES

Dada una familia de superficies $\mathcal{L}=\{S_\lambda\}$ de clase $q\geq 1$, planas, donde $\lambda\in[a,b]$

__Def__ La __envolvente__ de una familia $\mathcal{L}$ de superficies regulares es una superficie regular Σ que cumple

1) para un punto $\vec{P}\in\Sigma$ existe una superficie $\mathcal{L}$ tangente a Σ en $\vec{P}$
2) Cualquier porción de Σ que sea una superficie elemental es tangente a un número infinito de superficies de $\mathcal{L}$

La condición que cumple la envolvente

$$\mathcal{L}=\{F(x,y,z,\lambda)=0\}$$ ← familia de superficies en implícitas

que cumple
$$F_x'(x,y,z,\lambda)^2+F_y'(x,y,z,\lambda)^2+F_z'(x,y,z,\lambda)^2\neq 0$$

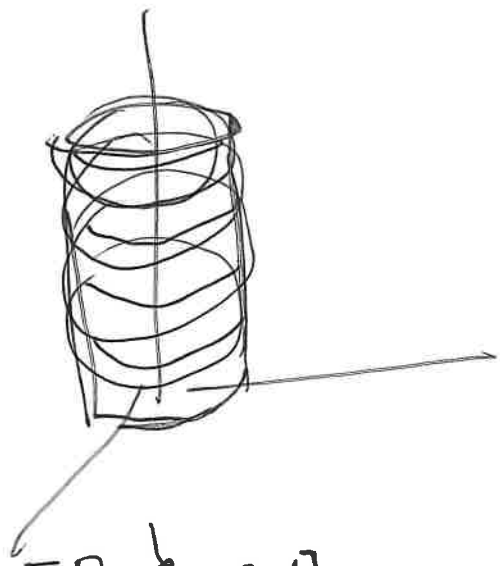
[El módulo del gradiente $\neq 0$]

Si existe la envolvente debe cumplir

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_\lambda'(x,y,z,\lambda)=0 \end{cases}$$

Ejemplo

Consideremos la familia de esferas de centro en el el segmento entre (0,0,0) y (0,0,1) y radio 1



$$\mathcal{L} \equiv \{F(x,y,z,\lambda)=0\}_{\lambda\in[0,1]}$$

En donde $F(x,y,z,\lambda) = x^2+y^2+(z-\lambda)^2-1=0$

$$\begin{cases} F(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_\lambda(x,y,z\,\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+(z-\lambda)^2=1 \\ 2(z-\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+0=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\lambda \end{cases}$$ (Es un cilindro)