curvatura de
una superficie

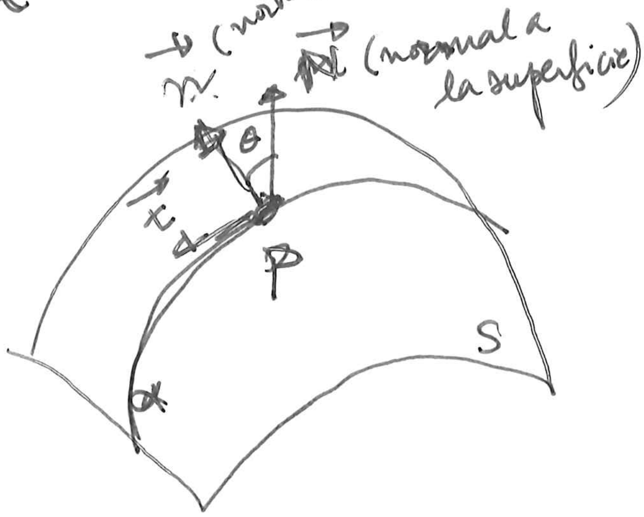
Sea

S es una superficie $\vec{x}(u,v)$

α es una curva parametrizada por la longitud de arco, que está contenida en la superficie S

Su ecuación será

$$\vec{x}(u(s), v(s))$$



Sea $\vec{n}$ el vector normal de la curva α.

Según la fórmula de Frenet

$$\vec{n} = k \frac{d\vec{T}}{ds} \qquad (k \text{ curvatura de } \alpha)$$

$\vec{N}$ es el vector normal a la superficie en P $\left[\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}\right]$

El vector tangente a la curva α es

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}(u(s), v(s))}{ds} = \vec{x}_u \cdot \frac{du}{ds} + \vec{x}_v \frac{dv}{ds}$$

derivamos $\vec{T}$ respecto de s

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d}{ds}\left[\vec{x}_u \frac{du}{ds} + \vec{x}_v \frac{dv}{ds}\right] =$$

cada sumando se deriva como un producto usando la regla de la cadena

$$= \left[\vec{x}_{uu}\frac{du}{ds} + \vec{x}_{uv}\cdot\frac{dv}{ds}\right]\frac{du}{ds} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} +$$

$$+ \left[\vec{x}_{vu}\frac{du}{ds} + \vec{x}_{vv}\frac{dv}{ds}\right]\frac{dv}{ds} + \vec{x}_v \cdot \frac{d^2v}{ds^2} =$$

$$= \vec{x}_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \vec{x}_{uv}\frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_u \frac{d^2u}{ds^2} +$$

$$+ \vec{x}_{vu}\frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + \vec{x}_v \frac{d^2v}{ds^2} \quad [1]$$

Calculamos el ángulo θ que forman $\vec{n}$ y $\vec{N}$

$$\cos\theta = \vec{N}\cdot\vec{n} = \kappa\frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{N}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos\theta}{\kappa} = \frac{d\vec{T}}{ds}\cdot\vec{N}$$

Para hallar este producto escalar

$$[1] \cdot \vec{N}$$

tendremos en cuenta que como $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$ están en el plano tangente $\vec{x}_u \cdot \vec{N} = 0$, $\vec{x}_v \cdot \vec{N} = 0$

así pues

$$\frac{\cos\theta}{\kappa} = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\,\vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \frac{du\,dv}{(ds)^2} + \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

Si llamamos $\begin{cases} L = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \\ M = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \\ N = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} \end{cases}$

$$\frac{\cos\theta}{\kappa} = \frac{L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2}{(ds)^2} =$$

Si recordamos que

$$(ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} = [\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv] \cdot [\vec{x}_u du + \vec{x}_v dv]$$

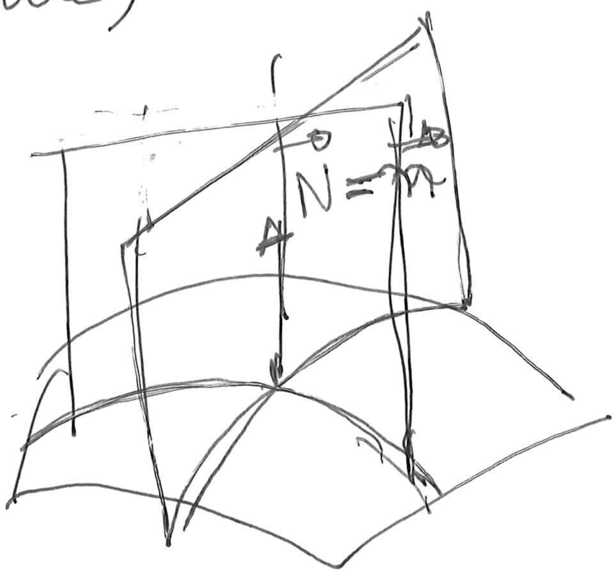
$$= \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u (du)^2 + 2\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v\, du\,dv + \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v (dv)^2$$

$$= E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2 = I(du, dv)$$

$$= \frac{\cos\theta}{k} = \frac{L(du)^2 + 2M\,du\,dv + N(dv)^2}{E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2} = \frac{\mathrm{II}(du\,dv)}{\mathrm{I}(du\,dv)}$$

Si α es una curva que se obtiene por la sección de la curva por un plano normal (según la dirección (du, dv) del plano tangente) se tiene que $\theta = 0$

$(\Rightarrow \cos(\theta) = 1)$



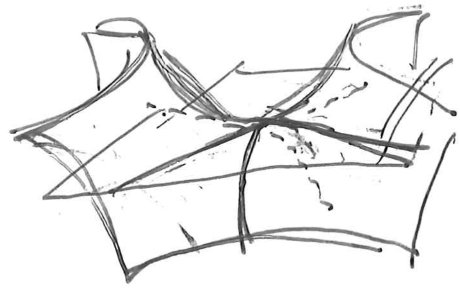
de modo que las curvaturas normales son

$$\boxed{\chi_n = \frac{\mathrm{II}(du, dv)}{\mathrm{I}(du, dv)}}$$

Direcciones asintóticas

Son las direcciones en las que la curvatura normal es cero
(la curva está en el plano tangente)
Es decir, son las soluciones

de $\chi_n = 0 \Rightarrow$



$$\Rightarrow \mathrm{II}(du, dv) = 0$$

$$\Rightarrow L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$
$$\Rightarrow L + 2M\frac{dv}{du} + N\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

Direcciones principales

Los valores máximo y mínimo de las curvaturas normales se llaman curvaturas principales

K_1 y K_2

El máximo y el mínimo de χ_n se obtiene haciendo $\frac{\partial}{\partial du}\chi_n = 0$ $\frac{\partial}{\partial v}\chi_n = 0$

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -du\,dv & (du)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Demostración

Si la curvatura normal en la dirección ($h = du$, $k = dv$)

$$\chi_n(h,k) = \frac{L\,h^2 + 2M\,hk + N\,k^2}{E\,h^2 + 2F\,hk + G\,k^2} = \frac{\mathrm{II}(h,k)}{\mathrm{I}(h,k)}$$

Los extremos verifican

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \chi_n}{\partial h} = \dfrac{\mathrm{I}(h,k)\,(2Lh+2Mk) - \mathrm{II}(h,k)\,(2Eh+2Fk)}{\mathrm{I}(h,k)^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \chi_n}{\partial k} = \dfrac{\mathrm{I}(h,k)\,(2Mh+2Nk) - \mathrm{II}(h,k)\,(2Fh+2Gk)}{\mathrm{I}(h,k)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (*) \begin{cases} (2Lh+2Mk) - \chi_n(h,k)\,(2Eh+2Fk) = 0 \\ (2Mh+2Nk) - \chi_n(h,k)\,(2Fh+2Gk) = 0 \end{cases}$$

Si suponemos que $\chi_n(h,k) \neq 0$, eliminándolo en ambas ecuaciones

$$\frac{2Lh+2Mk}{2Eh+2Fk} = \frac{2Mh+2Nk}{2Fh+2Gk} = \chi_n$$

$$(2Lh+2Mk)(2Fh+2Gk) - (2Mh+2Nk)(2Eh+2Fk) = 0$$

$$(Lh+Mk)(Fh+Gk) - (Mh+Nk)(Eh+Fk) = 0$$

$$(LF - ME)\,h^2 + (LG + \cancel{MF} - \cancel{MF} - NE)\,hk + (MG - NF)\,k^2 = 0$$

$$(ME - LF)\,du^2 + (NE - LG)\,du\,dv + (FN - MG)\,dv^2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (dv)^2 & -du\,dv & (du)^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

$$\boxed{(EM - FL) + (EN - GL)\frac{dv}{du} + (FN - GM)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0}$$

Ecuaciones de las direcciones principales

Los puntos en los que

$$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G} = cte$$

Se llaman <u>puntos umbílicos</u>

(Todas las direcciones pueden considerarse principales $k_n = cte$ $(\Rightarrow k_1 = k_2)$]

Teorema En cada punto, no umbílico las dos direcciones principales son perpendiculares

Demostración

Si una dirección principal es (du, dv), la pendiente $\frac{dv}{du} = \mu$ verifica

$$(EM - FL) + (EN - GL)\mu + (FN - GM)\mu^2 = 0 \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} \mu^2 & -\mu & 1 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

Dos direcciones $(1, \mu_1)$, $(1, \mu_2)$ son perpendiculares con la métrica del plano tangente si su producto escalar es 0

$$(1, \mu_1) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(E + \mu_1 F, F + \mu_1 G) \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = E + \mu_1 F + F\mu_2 + \mu_1\mu_2 G = 0$$

$$E + F\mu_1 + F\mu_2 + G\mu_1\mu_2 = 0$$

$$E + F(\mu_1+\mu_2) + G(\mu_1\mu_2) = 0 \quad (**)$$

Las ~~di~~recciones principales $(1, \mu)$ son las dos soluciones de la ecuación de segundo grado $(*)$

La ~~suma~~ de las soluciones es

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$
$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

El producto de las soluciones es

$$\mu_1 \cdot \mu_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}$$

Estos valores verifican la condición $(**)$ de ortogonalidad

En efecto,

$$E + F\left(\frac{GL-EN}{FN-GM}\right) + G\left(\frac{EM-FL}{FN-GM}\right) =$$

$$= \frac{E(FN-GM)+F(GL-EN)+G(EM-FL)}{FN-GM} =$$

$$= \frac{\cancel{EFN} - \cancel{EGM} + \cancel{FGL} - \cancel{FEN} + \cancel{GEM} - \cancel{GFL}}{FN-GM} = 0$$

El producto de las curvaturas principales se llama CURVATURA TOTAL o de GAUSS

$$K_t = K_1 \cdot K_2 = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

La media de las curvaturas principales se llama CURVATURA MEDIA

$$K_m = \frac{K_1+K_2}{2} = \frac{EN+GL-2FM}{2(EG-F^2)}$$

Ecuación de las curvaturas principales

Eran las ecuaciones de las curvaturas normales *

$$\begin{cases} Lh + Mk - K_n(h,k)(Eh + Fk) = 0 \\ Mh + Nk - K_n(h,k)(Fh + Gk) = 0 \end{cases}$$

si consideramos la dirección $(1,\mu)$

$$\begin{cases} (L + M\mu) - K_n(E + F\mu) = 0 \\ (M + N\mu) - K_n(F + G\mu) = 0 \end{cases}$$

Eliminando μ

$$\begin{cases} L + M\mu - KE - KF\mu = 0 \\ M + N\mu - KF - KG\mu = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu(M - KF) = KE - L \\ \mu(N - KG) = KF - M \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{KE-L}{M-KF} = \frac{KF-M}{N-KG} \Rightarrow (KE-L)(N-KG) - (M-KF)(KF-M) = 0$$

$$(KE-L)(N-KG) - (M-KF)(KF-M) = 0$$

$$(-EG + F^2)K^2 + (EN + GL - FM - FM)K + (-LN + M^2) = 0$$

$$(-EG+F^2)K^2 + (EN + GL - 2FM)K + (LN - M^2) = 0 \quad [\triangle]$$

$$(EG - F^2)K^2 - (EN + GL - 2FM)K$$

de esta ecuación de 2º grado se deduce una expresión para K_t y K_m

Otra forma

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} K^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & M \\ F & N \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} L & F \\ M & G \end{vmatrix} \right\} K + \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} = 0$$

12 bis

De la relación que hay entre ~~las~~ suma y el producto de las raíces K_1 y K_2 de esta ecuación se obtiene que

$$\boxed{\begin{aligned} X_t &= K_1 \cdot K_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ X_m &= \frac{1}{2}(K_1 + K_2) = \frac{EN + GL - 2FM}{2(EG - F^2)} \end{aligned}}$$

Curvatura de Gauss (o total)

$$K_t = K_1 \cdot K_2$$

Es una característica que define la superficie.

Dos superficies con distintinta curvatura total no pueden adaptarse una a otra sin romperse o estirarse

Por ejemplo un plano y un cilindro pueden adaptarse ~~uno~~ a otro, pero no un plano y una esfera o una esfera o otra de distinto tamaño

En la geometría intrínseca son muy importantes las superficies que tienen la misma curvatura total en todos sus puntos. Esto da origen a las geometrías no-euclídeas

Teorema Egregio de Gauss: La curvatura gaussiana puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie. Es decir la curvatura total es un invariante intrínseco de la superficie (La curvatura gaussiana es invariante bajo isometrías locales)

La propiedad más notable de la
curvatura de Gauss (propiedad que explica
su gran significado en la teoría de superficies)
es la siguiente. Supongamos que la
superficie es de un material flexible
pero inextensible — por ejemplo una hoja
delgada de estaño — de modo que
podemos combarla de distintas formas
sin estirarla ni romperla. Durante
este proceso las curvaturas principales
cambiarán, como probó Gauss, pero el
producto $K_1 \cdot K_2$ permanecerá invariable
en cada punto. Este resultado funda-
mental prueba que dos superficies
con diferentes curvaturas de Gauss son
inherentemente distintas entre sí,
consistiendo esa diferencia en el hecho
de que si las deformamos de todas las formas
posibles, sin estirarlas ni romperlas,
nunca podemos superponer una sobre
otra. Por ejemplo, un segmento de la
superficie de una esfera nunca podrá deformarse
de tal forma que se adapte a un plano
o la superficie de una esfera a otra de
distinto radio

[La Matemática: su contenido, métodos y significado II pag 113]

Curvatura media

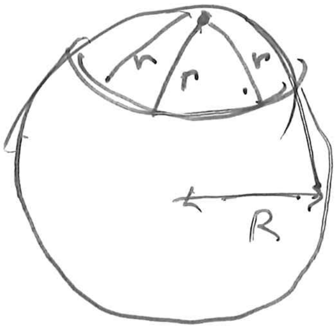
$$K_m = \frac{K_1 + K_2}{2}$$

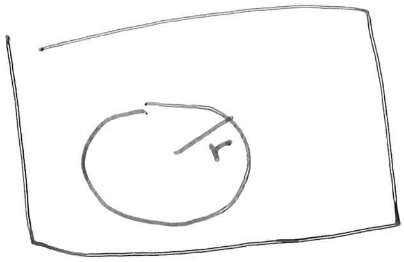
La característica que define las superficies mínimas (pompas de jabón) es que en todos sus puntos la curvatura media es cero

Intuitivamente en las superficies mínimas la suma de tensiones superficiales en todas las direcciones suman cero

Geometría Intrínseca

Son las propiedades geométricas que solo dependen de las medidas de longitudes



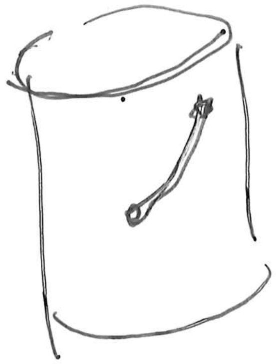


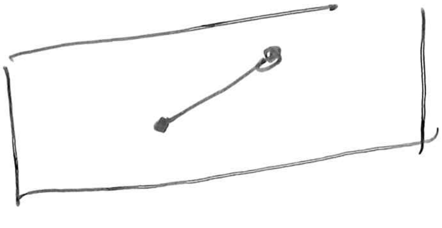
En una esfera

$S(r)=2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$

En un plano la longitud de una circunferencia es $S(r)=2\pi r$

En un cilindro y un plano





tienen la misma geometría intrínseca

Las superficies equivalentes a un plano ($K_g=0$) son las superficies "desarrollables" que son envolventes de planos (cilindros, conos, etc. hiperboloide las regladas, ---) banda de Möbius)