

SISTEMAS de
ECUACIONES
LINEALES,
HOMOGÉNEOS

Introducción a la
ESTABILIDAD

(1)

SISTEMAS de ECUACIONES

LINEALES HOMOGÉNEOS

$$\boxed{\vec{x}' = A \vec{x}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \\ \frac{dx_3(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_1 - x_2 + x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 5x_2 - x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = x_1 - x_2 + 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Para resolver $\vec{x}' = A \vec{x}$ ensayamos una solución
 $\vec{x} = \vec{w} e^{mt}$; $\vec{x}' = m \vec{w} e^{mt}$

de modo que

$$m \vec{w} e^{mt} = A \vec{w} e^{mt} \Rightarrow m \vec{w} = A \vec{w} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \vec{w} - m \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow (A - mI) \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \begin{matrix} \text{polinomio} \\ \text{característico} \\ \det(A - mI) \end{matrix}$$

$\rightarrow \begin{cases} m \text{ es un autovalor de } A \\ \vec{w} \text{ es un autovector de } m \end{cases}$

puede haber varios casos según los
 autovalores y sus autoespacios.

Un sistema lineal homogéneo tiene una solución
 general $\boxed{\vec{x} = c_1 \vec{x}_1 + c_2 \vec{x}_2 + c_3 \vec{x}_3}$

Autovalores reales distintos

$$\vec{x} = C_1 \vec{w}_1 e^{m_1 t} + C_2 \vec{w}_2 e^{m_2 t} + C_3 \vec{w}_3 e^{m_3 t}$$

(2)

Resolver
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = -x + 5y + z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 3z \end{cases}$$

Respuesta

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(en notación matricial)

polinomio característico

$$\det(A - mI) = \det \begin{pmatrix} 3-m & -1 & 1 \\ -1 & 5-m & -1 \\ 1 & -1 & 3-m \end{pmatrix} =$$

$$= m^3 - 11m^2 + 36m - 36 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=3 \\ m=6 \end{cases}$$

(autovalores reales distintos)

Autoespacios

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$E(3) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \begin{cases} -y + z = 0 \\ x - y = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(6) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3

Con lo cual la solución general es

$$\vec{x} = c_1 \vec{w}_1 e^{2t} + c_2 \vec{w}_2 e^{3t} + c_3 \vec{w}_3 e^{6t}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t}$$

Autovector autovalor

$$\begin{cases} x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ y = c_2 e^{3t} + c_3 (-2) e^{6t} \\ z = c_1 (-1) e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{cases}$$

Esto también se puede escribir así:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \\ 0 & e^{3t} & -2e^{6t} \\ -e^{2t} & e^{3t} & e^{6t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow M(t)$
[Matriz fundamental]

nota: la matriz fundamental verifica

$$\frac{dM(t)}{dt} = AM(t)$$

Problema de valores
Iniciales $\rightarrow$ ver pag 7 de estos apuntes

Autovalores complejos conjugados

(4)

Ejemplo: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}$ $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 5x - 3y \end{cases}$

Solución

Autovalores:

$$p(m) = \det \begin{pmatrix} 1-m & -1 \\ 5 & -3-m \end{pmatrix} = 0$$

$$m^2 + 2m + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -1+i \\ m_2 = -1-i \end{cases}$$

(los autovalores son conjugados)

Se buscan los autovectores. Solo hace falta uno de ellos, porque el otro es su conjugado

$$E(-1+i) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1-(-1+i) & -1 \\ 5 & -3-(-1+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (2-i)x - y = 0 \\ 5x - (2-i)y = 0 \end{cases} \Rightarrow \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

El otro autovector no lo vamos a necesitar pero es el conjugado de $\vec{w}_1$,

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

Una solución fundamental es

(5)

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{(-1+i)t}$$

Recordamos que $e^{a+bi} = e^a [\cos b + i \sin b]$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{-t} [\cos t + i \sin t] =$$

La otra solución fundamental no es necesario escribirla.

De X_1 separamos la parte real y la parte imaginaria

$$= \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t \\ 2e^{-t} \cos t + e^{-t} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-t} \sin t \\ -e^{-t} \cos t + 2e^{-t} \sin t \end{pmatrix}$$

En variable real la parte real y la parte imaginaria son soluciones fundamentales. con lo cual

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \cos t + \sin t \end{pmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$M(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ 2 \cos t + \sin t & -\cos t + 2 \sin t \end{pmatrix} \text{ Matriz fundamental}$$

Casos chungos

(6)

- 1 { Un autovector k (doble)
Un solo autovector $\vec{U}$

Soluciones fundamentales:

$$\begin{cases} X_1(t) = \vec{U} e^{kt} \\ X_2(t) = \vec{U} t e^{kt} + \vec{V} e^{kt} = (\vec{U} t + \vec{V}) e^{kt} \end{cases}$$

cómo se calculan autovectores generalizados

$$\begin{cases} (A - kI) \vec{U} = \vec{0} & (\text{autovector}) \\ (A - kI) \vec{V} = \vec{U} \end{cases}$$

Dimensión 3

- 2 { Un autovector k (triple)
Un solo autovector $\vec{U}$

Soluciones fundamentales

$$\begin{cases} X_1(t) = \vec{U} e^{kt} \\ X_2(t) = (\vec{U} t + \vec{V}) e^{kt} \\ X_3(t) = \left(\frac{1}{2} \vec{U} t^2 + \vec{V} t + \vec{W} \right) e^{kt} \end{cases}$$

Cálculo de los autovectores generalizados (7)

$$\begin{cases} (A - kI) \vec{U} = \vec{0} \\ (A - kI) \vec{V} = \vec{U} \\ (A - kI) \vec{W} = \vec{V} \end{cases}$$

(3)

Un autovector k (triple)
Dos autovectores $\vec{U}_1, \vec{U}_2$

Soluciones fundamentales

$$\begin{cases} X_1(t) = U_1 e^{kt} \\ X_2(t) = U_2 e^{kt} \\ X_3(t) = (U_1 t + V) e^{kt} \end{cases}$$

Cálculo de los autovectores generalizados

$$\begin{cases} (A - kI) \vec{U} = \vec{0} \begin{matrix} \nearrow \vec{U}_1 \\ \searrow \vec{U}_2 \end{matrix} \\ (A - kI) \vec{V} = \vec{U} \end{cases}$$

[$\vec{U}$ es una combinación lineal cualquiera de $\vec{U}_1$ y $\vec{U}_2$]

SISTEMAS LINEALES NO HOMOGÉNEOS

(8)

$$\vec{X}'(t) = A(t) \vec{X} + \vec{F}(t)$$

lo normal es que $A(t) = A$
sea de coeficientes
constantes

El conjunto de soluciones de una ecuación lineal vectorial verifican las mismas propiedades que en las ecuaciones lineales ordinarias.

$$\vec{X}(t) = \underbrace{M(t) \vec{C}}_{\text{Solución general de la homogénea}} + \vec{X}_p(t)$$

Solución general de la homogénea

Solución particular de la completa

Para hallar una solución particular de la completa hay varios métodos

1) Método de variación de las constantes

Se ensaya $\vec{X}(t) = M(t) \vec{C}(t)$

$$\begin{cases} \vec{X}(t) = M(t) \vec{C}(t) \\ \vec{X}'(t) = M'(t) \vec{C}(t) + M(t) \vec{C}'(t) \end{cases}$$

$$M'(t) \vec{C}(t) + M(t) \vec{C}'(t) = \underbrace{A(t) M(t) \vec{C}(t)}_{M'(t)} + \vec{F}(t)$$

$$M(t) \vec{C}'(t) = \vec{F}(t) \Rightarrow \boxed{\vec{C}(t) = \int M(t)^{-1} \vec{F}(t) dt}$$

2) Método de coeficientes indeterminados (9)

cuando A es de coeficientes constantes y $\vec{F}(t)$ son de tipo exponencial, polinómicos o trigonométricos

3) Transformada de Laplace

Matriz fundamental

La ecuación $\vec{X}'(t) = A(t) \vec{X}$ lineal homogénea

tiene como solución general

$$\vec{X}(t) = M(t) \cdot \vec{C} \quad (1)$$

Teorema

Se verifica que

$$\frac{dM(t)}{dt} = A(t) \cdot M(t) \quad (1)$$

Demostración

$$\begin{aligned} \text{derivando (1)} \rightarrow \vec{X}' &= M'(t) \cdot \vec{C} \quad \vec{X}' = A \vec{X} = A M(t) \vec{C} = A M \vec{C} \\ \vec{X}' &= A \vec{X} \end{aligned} \Rightarrow M' \vec{C} = A M \vec{C} \Rightarrow \underline{\underline{M' = A M}}$$

Problema de valores iniciales determinar el valor de $\vec{C}$
 $M(t_0) \vec{C} = \vec{X}_0 \Rightarrow \vec{C} = M^{-1}(t_0) \vec{X}_0$
 sustituir

$$\begin{cases} \vec{X}' = A \vec{X} \\ \vec{X}(t_0) = \vec{X}_0 \end{cases}$$

$$\vec{X} = M(t) M^{-1}(t_0) \vec{X}_0$$

8. Introducción a la ESTABILIDAD

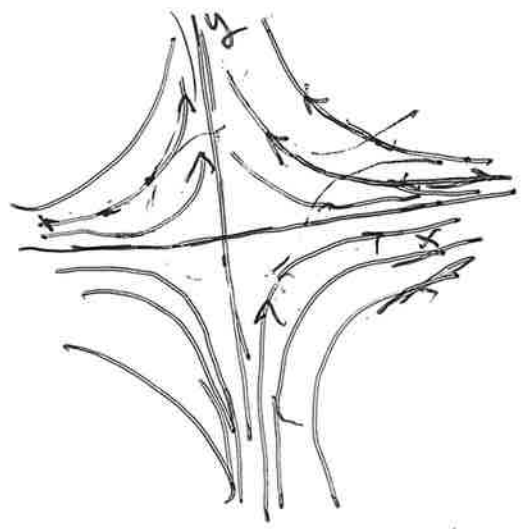
Sistemas autónomos

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

[f y g no dependen de t]

Observación $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$ Ec. diferencial de 1º orden

Plano de fases XY



La solución del sistema es una familia de curvas paramétricas
$$\vec{r}_c(t) = \begin{pmatrix} x_c(t) \\ y_c(t) \end{pmatrix}$$

Diagrama de fases

Se representan las soluciones en el plano de fases

Punto crítico (puntos estacionarios de velocidad cero)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0 \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Definición

Estabilidad en un punto crítico P



Un punto crítico P es estable si cualquier trayectoria que pase cerca de P no se va lejos de P



$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que

$$\text{si } (x(t_0), y(t_0)) \in B_\delta(P) \Rightarrow (x(t), y(t)) \in B_\epsilon(P)$$

$$\forall t \geq t_0$$

Estabilidad asintótica

Un punto crítico es asintóticamente estable si además si estable la trayectoria tiende hacia P



Estabilidad de sistemas lineales con coeficientes constantes

(12)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

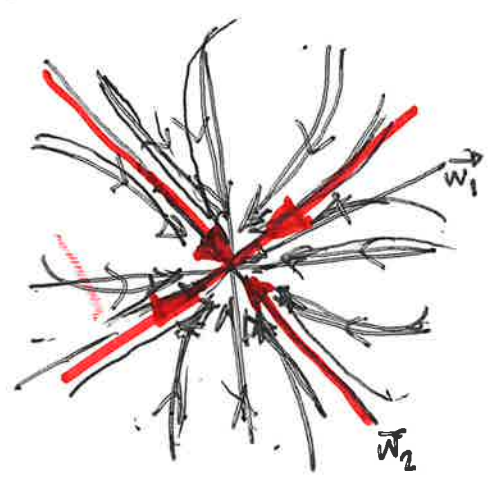
El $(0,0)$ es un punto crítico

La naturaleza se puede saber conociendo el signo de los autovalores y las direcciones de los autovectores

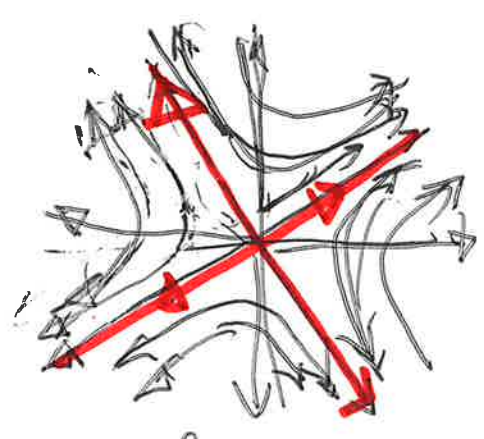
A grosso modo:

- 1) Si los autovalores son reales, las trayectorias van a seguir las direcciones de los autovectores y hacia afuera si el autovalor es positivo y hacia adentro, si el autovalor es negativo
- 2) Si los autovalores son complejos, la parte real indica si sale (positivo) o entra (negativo) la trayectoria y la parte imaginaria indica a la velocidad a la que da vueltas

(a) k_1, k_2 son dos autovalores reales
los dos negativos los dos positivos

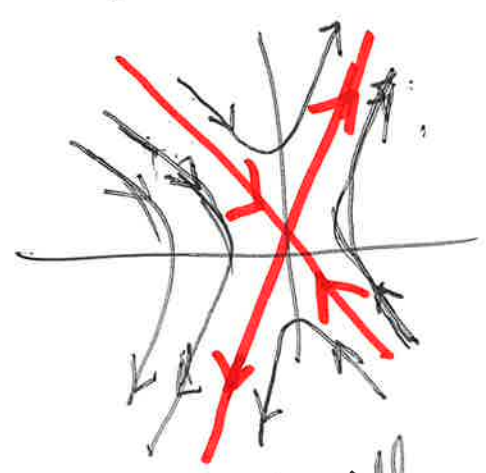


Sumidero estable



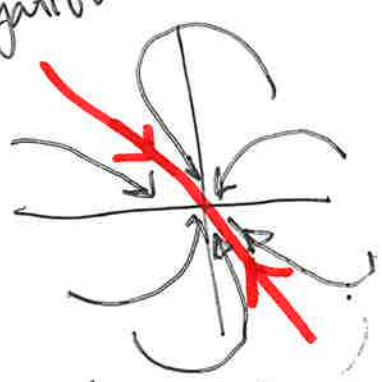
fuerza inestable

Uno positivo y otro negativo



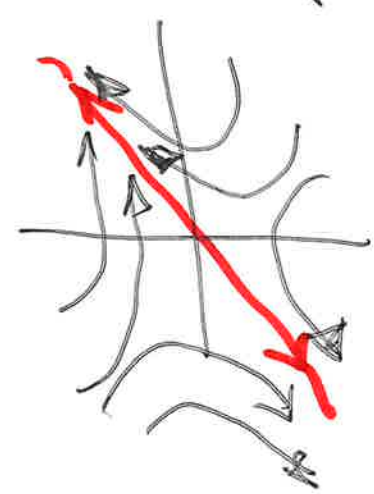
Punto de silla

b) Un autovalor doble negativo



nodo estable

positivo



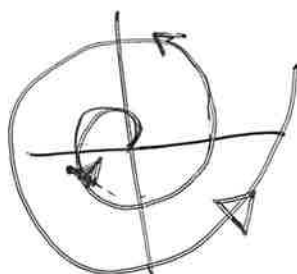
nodo inestable

c) Autovalores complejos

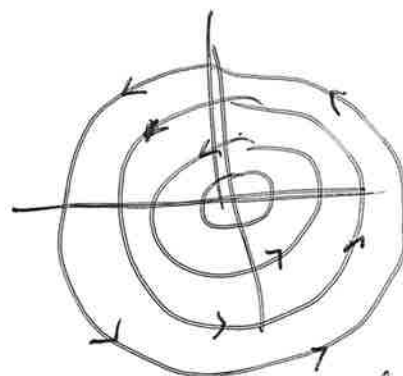
(14)



parte real
negativa



parte real
positiva



parte real
nula

Muchas veces no interesa calcular el valor concreto de los autovalores, basta conocer su signo. Para dimensión dos es el problema de estudiar el signo de las raíces de una ecuación de segundo grado.

Para más dimensiones se puede usar el criterio de Hurwitz



Para sistemas $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases}$ donde

f y g no son funciones lineales se puede estudiar el sistema linealizado que le aproxima.
(ver pag 282)

