

Problemas de
sistemas lineales

de ecuaciones
diferenciales

Febrero 2009

2

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales

$$X' = AX + F$$

donde $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $F = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} t \in \mathbb{R}$

Se pide

a) Comprobar que $M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & t-1 \end{pmatrix} e^{2t}$ es

una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado.

b) Su solución general

a) Recordatorio:
1) La ecuación lineal homogénea de 1^{er} orden

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

tiene soluciones con estructura de espacio vectorial (Solución general del sistema homogéneo)

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n$$

donde $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ que es un sistema generador de las soluciones. Se dice que $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ es un sistema de soluciones fundamentales

Se llama MATRIZ FUNDAMENTAL del sistema a una matriz $M(t)$

que tiene por columnas las funciones de un sistema fundamental de soluciones de modo que la solución general

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + \dots + c_n X_n =$$

$$= M(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Como consecuencia, la matriz fundamental $M(t)$ verifica la ecuación lineal homogénea verifica que

$$\frac{dM(t)}{dt} = A(t) M(t)$$

2) Además, en algún valor de $t_0 \in \mathbb{R}$ $\det(M(t_0)) \neq 0$ [soluciones linealmente independientes]

Ejemplo
(pag 220)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 + 2x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 - x_2 \end{cases}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$[X' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_A X]$$

Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico $P(\lambda)$

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = -3 \end{cases}$$

Los autovectores correspondientes son

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4

Son soluciones fundamentales

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix}$$

de modo que la solución general del sistema homogéneo es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-3t} \\ e^t & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz fundamental es

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-3t} \\ e^t & -e^{-3t} \end{pmatrix}$$

y la solución general puede escribirse como

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & e^{-3t} \\ e^t & -e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que $\frac{d}{dt} M(t) = A M(t)$

$$\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} e^t & -3e^{-3t} \\ e^t & 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

$$A M(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & e^{-3t} \\ e^t & -e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & -3e^{-3t} \\ e^t & 3e^{-3t} \end{pmatrix}$$

En nuestro caso

$$1) \quad M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ -e^{2t} & -te^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{dM(t)}{dt} &= \begin{pmatrix} 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \\ -2e^{2t} & -e^{2t} - 2te^{2t} - 2e^{2t} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1+2t \\ -2 & -3-2t \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

es igual a

$$A(t)M(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & t+t+1 \\ -2 & t-3t-3 \end{pmatrix} e^{2t} = \begin{pmatrix} 2 & 1+2t \\ -2 & -3-2t \end{pmatrix} e^{2t}$$

2) comprobamos que las soluciones fundamentales (columnas de $M(t)$) son l. i.)

$$\det(M(t)) = \det \left[\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} \right] =$$

$$= e^{2t} \det \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} = e^{2t} (-1) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

b) La solución general de la homogénea será (escritas de diversas formas)

$$X(t) = M(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t \\ -1-t-1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & t e^{2t} \\ -e^{2t} & -t e^{2t} - e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 (t e^{2t}) \\ -c_1 e^{2t} - c_2 (t e^{2t} + e^{2t}) \end{pmatrix} =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Comentario: Si hubiésemos resultado el sistema homogéneo directamente habríamos hecho así

1) polinomio característico de A y Autovalores

$$P(k) = \det \begin{pmatrix} 1-k & -1 \\ 1 & 3-k \end{pmatrix} = k^2 - 4k + 4 = (k-2)^2$$

tiene una raíz doble $k=2$

por tanto, (ver pag 229 del libro)
las soluciones fundamentales serán

⑥

$$\begin{cases} x_1 = U e^{kt} \\ x_2 = Ut + V e^{kt} = (Ut + V) e^{kt} \end{cases}$$

Siendo

$$\begin{cases} (A - kI)U = 0 \\ (A - kI)V = U \end{cases} \quad [U \text{ es un autovector}]$$

En nuestro caso:

Calculamos el autovector U , para $k=2$

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tal que } (A - kI) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \rightarrow U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos el autovector generalizado $V = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\alpha - \beta = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Así pues, las soluciones fundamentales

(8)

son $x_1 = U e^{kt} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$

$$x_2 = (U t + V) e^{kt} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right] e^{2t} = \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Con lo cual la solución general de la homogénea es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{bmatrix} e^{2t}}_{\text{matriz fundamental } M(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Para hallar una solución particular de la ecuación completa

$$X' = AX + F$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Proponemos una función de la forma

$$x_p = \begin{pmatrix} A e^{-t} \\ B e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{-t}$$

(9)

Sustituyendo en la ecuación

$$\begin{pmatrix} -A e^{-t} \\ -B e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A e^{-t} \\ B e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -A \\ -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -A \\ -B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A - B + 1 \\ A + 3B - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -A = A - B + 1 \\ -B = A + 3B - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A + B = 1 \\ -A - 4B = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & 3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{1}{3}; \quad A = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Así pues: } x_p = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{-t}$$

La solución general del sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ -t+1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Nota: La solución particular de la completa también se podría haber hallado usando el método de variación de las constantes

Método de variación de las constantes (10)
para hallar la solución particular de la completa.

Se ensaya
$$\begin{cases} \vec{x}_p(t) = M(t) \vec{C}(t) \\ \vec{x}'_p(t) = M'(t) \vec{C}(t) + M(t) \vec{C}'(t) \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación $x' = Ax + F$

$$M'(t) \vec{C}(t) + M(t) \vec{C}'(t) = \underbrace{A(t) M(t)}_{M'(t)} \vec{C}(t) + \vec{F}(t)$$

$$M(t) \vec{C}'(t) = \vec{F}(t) \Rightarrow \vec{C}'(t) = \int M^{-1}(t) \vec{F}(t) dt$$

En nuestro caso:

Calculamos la inversa $M^{-1}(t)$

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} e^{2t} \Rightarrow M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix}^{-1} e^{-2t}$$

$$M^{-1}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$M^{-1}(t) \cdot \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} t+1 & t \\ -1 & -1 \end{pmatrix} e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c_1 = \int e^{-3t} dt = -\frac{1}{3} e^{-3t}; \quad c_2 = 0$$

Sustituyendo

$$\begin{pmatrix} x_{1p} \\ x_{2p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & t \\ -1 & -t-1 \end{pmatrix} e^{2t}}_{M(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} e^{-3t} \\ 0 \end{pmatrix}}_{C(t)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} e^{-t} \\ \frac{1}{3} e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} e^{-t}$$

Que coincide con lo hallado
por el método de los coeficientes
indeterminados

Junio 2010

Resuélvase el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$ donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X' = \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix}$$

Buscamos los autovalores de A (raíces del polinomio característico)

$$\phi(k) = \det \begin{pmatrix} 1-k & -2 & 2 \\ -2 & 1-k & 2 \\ 2 & 2 & 1-k \end{pmatrix} =$$

$$= -k^3 + 3k^2 - \left(\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right) k +$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -k^3 + 3k^2 + 9k - 27 = -(k-3)^2(k+3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=3 & (\text{doble}) \\ k=-3 & (\text{simple}) \end{cases}$$

Se calculan los correspondientes autoespacios

$$E(3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \{ -2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 0 \} = \{ -\alpha - \beta + \gamma = 0 \}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(-3) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - \beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{array} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} + C_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$\uparrow$
 Autovectores

$\uparrow$
 0

$\uparrow$
 0

Autovectores 0

Junio 2010

a) Solución general del sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (a = cte \neq 0)$$

b) Ecuación de las trayectorias

c) Hallar los puntos críticos, y analizar la estabilidad

La matriz del sistema es $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix}$

Buscamos los autovalores (raíces del polinomio característico)

$$p(k) = \det \begin{pmatrix} 0-k & 1 \\ -a^2 & 0-k \end{pmatrix} = k^2 + a^2 = 0$$

$$\text{Autovalores } \begin{cases} k = +ai \\ k = -ai \end{cases}$$

Calculamos los correspondientes autoespacios.

En realidad, solo hace falta calcular uno de ellos, porque el otro es su conjugado

$$E(ai) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 0-ai & 1 \\ -a^2 & 0-ai \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \begin{cases} -ai\alpha + \beta = 0 \\ -a^2\alpha - ai\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -ai\alpha + \beta = 0 \end{cases}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ ai \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego una solución fundamental es

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ ai \end{pmatrix} e^{ait} = \begin{pmatrix} 1 \\ ai \end{pmatrix} (\cos(at) + i\sin(at))$$

Ahora separamos la parte real y la parte imaginaria cada una de estas partes serán una solución real fundamental

$$X = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -a\sin(at) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin(at) \\ a\cos(at) \end{pmatrix}$$

Con lo cual son soluciones fundamentales

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -a\sin(at) \end{pmatrix} ; X_2 = \begin{pmatrix} \sin(at) \\ a\cos(at) \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 = C_1 \begin{pmatrix} \cos(at) \\ -a\sin(at) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin(at) \\ a\cos(at) \end{pmatrix}$$

De otra manera

$$\begin{cases} x(t) = c_1 \cos(at) + c_2 \sin(at) \\ y(t) = -c_1 a \sin(at) + c_2 a \cos(at) \end{cases}$$

b) Cálculo de las trayectorias

El sistema dado es

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -a^2 x \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -a^2 \frac{x}{y}$$

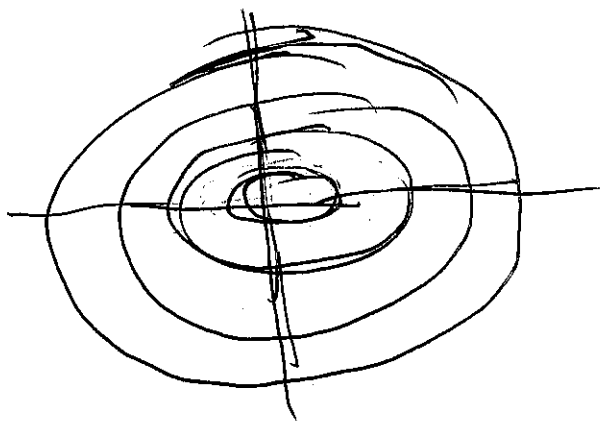
$$\Rightarrow y dy = -a^2 x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int -a^2 x dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{a^2}{2} x^2 + K$$

$$a^2 x^2 + y^2 = C^2$$

Son una familia de elipses



$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = c^2$$

$$\boxed{\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 a^2} = 1}$$

c) los puntos críticos son las soluciones
de $\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ [puntos estacionarios]
velocidad = (0,0)

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ a^2 x=0 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

d) la estabilidad del punto crítico es un Centro porque
es un punto ESTABLE

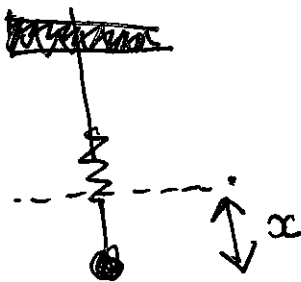
Comentario

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -a^2 x \end{cases}$$

por tanto el sistema es

$$\boxed{x'' + a^2 x = 0}$$

Es un
oscilador
armónico



$$x(t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at)$$

Septiembre de 2010

Solución general del sistema

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{cases}$$

Es este sistema en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico - Autovalores

$$P(k) = \det \begin{pmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 2 & 1-k & -2 \\ 3 & 2 & 1-k \end{pmatrix} =$$

$$= - (k-1)(k^2 - 2k + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=1 \pm 2i \end{cases}$$

Calculamos los autoespacios correspondientes

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 2\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Luego una solución fundamental es

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t$$

Para las soluciones complejas conjugadas $1 \pm 2i$
 Solo hay que hacerlo para uno de los valores

$$E(1+2i) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 2 & -2i & -2 \\ 3 & 2 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2i\alpha = 0 \\ 2\alpha - 2i\beta - 2\gamma = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} \right\rangle$$

La solución fundamental es

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{1+2i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix} e^t [\cos(2t) + i \sin(2t)]$$

(21)

Para hallar ~~las~~ soluciones fundamentales reales, tenemos que separar la parte real y la parte imaginaria

$$X = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}}_{x_2} e^t + i \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}}_{x_3} e^t$$

Con lo cual la solución general es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} e^t$$

O también

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \cos(2t) & \sin(2t) \\ 2 & \sin(2t) & -\cos(2t) \end{pmatrix}}_{M(t)} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$M(t)$

matriz fundamental que
tiene por columnas las soluciones
fundamentales

Junio 2011

En el sistema

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Solución general
- Ecuación de las trayectorias
- Estabilidad en el punto crítico $(0,0)$, dibujando la disposición de las trayectorias en las proximidades de dicho punto, y deduciendo correctamente el sentido del recorrido de un punto $(x(t), y(t))$ sobre las mismas

Se buscan los autovalores de la matriz A

$$p(k) = \det \begin{pmatrix} -1-k & 0 \\ 0 & 1-k \end{pmatrix} = (k+1)(k-1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases} \text{ (autovalores)}$$

Se calculan los correspondientes autoespacios

$$E(1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \{-2\alpha = 0\} \rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$

$$\Rightarrow \{2\beta = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por tanto la solución general es

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \Rightarrow \begin{cases} x = c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^t \end{cases}$$

- b) Las trayectorias "entran" en el punto crítico $(0,0)$ siguiendo la dirección del autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} [e^{-t}]$ y "salen" siguiendo la dirección del autovector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} [e^t]$

Las trayectorias, en paramétricas

$$\begin{cases} x = c_2 e^{-t} \\ y = c_1 e^t \end{cases}$$

siendo

$$\begin{cases} c_1 = y_0 = y(0) \\ c_2 = x_0 = x(0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = c_1 \cdot \frac{1}{e^{-t}} = c_1 \cdot \frac{c_2}{x} \Rightarrow y = \frac{x_0 y_0}{x} \text{ (hipérbolas)}$$

De otro modo

De la expresión

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x \\ \frac{dy}{dt} = y \end{cases}$$

Se deduce que $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(y) = -\ln(x) + C$$

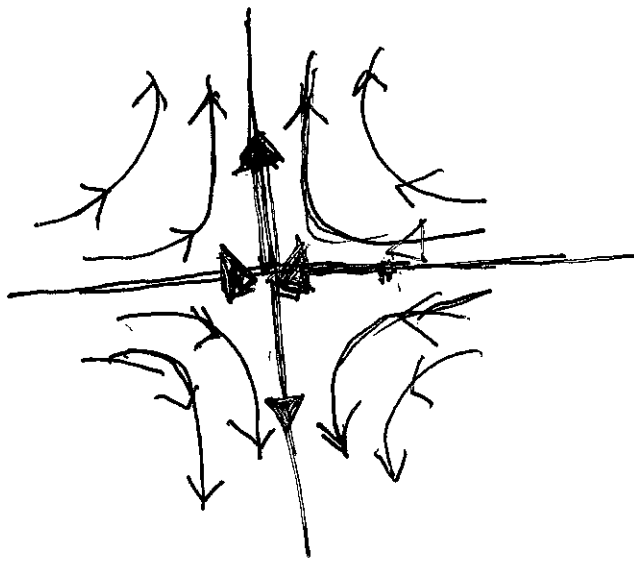
$$\ln(y) + \ln(x) = C$$

$$\ln(y \cdot x) = C$$

$$\boxed{yx = C} \Leftrightarrow \text{hipérbolas}$$

$$c) \text{ cuando } t \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{cuando } t \rightarrow -\infty \Rightarrow \begin{cases} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0 \end{cases}$$



Pto inestable (punto de silla)

Septiembre 2011

- a) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales $X' = AX$, donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad X' = \frac{dX}{dt}$$

- b) Determinar la solución del problema de valor inicial

$$X' = AX \quad ; \quad X(0) = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se estudian los autovalores y autovectores de la matriz del sistema

Autovalores

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 2 \\ \lambda = -1 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Autoespacios

$$E(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

(27)

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \text{ es solución fundamental}$$

$$E(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \{ \alpha + \beta + \gamma = 0 \} \rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \text{ es solución fundamental}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \text{ es solución fundamental}$$

Por tanto una solución general de $X' = AX$

es

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & -e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$M(t)$ matriz fundamental

Resumen en $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

1) Tres autovalores reales distintos

Autovalores m_1, m_2, m_3

Autovectores U, V, W

$$X = c_1 U e^{m_1 t} + c_2 V e^{m_2 t} + c_3 W e^{m_3 t}$$

2)

Un autovalor real $m_1 \rightarrow$ Autovector U
y dos autovalores complejos conjugados

$$m = \alpha \pm \beta i$$

Se calcula V , el autovector (complejo de)

$$m = \alpha + \beta i$$

Una solución fundamental es

$$X = V \cdot e^{(\alpha + \beta i)t} = V e^{\alpha t} + [\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)]$$

Las dos soluciones fundamentales son: una la parte real y otra la parte imaginaria

5

Un autovalor k (triple)Dos autovectores U_1, U_2

Soluciones fundamentales

$$x_1 = U_1 e^{kt}$$

$$x_2 = U_2 e^{kt}$$

$$x_3 = (Ut + V) e^{kt}$$

Sendo

$$(A - kI) \vec{U} = \vec{0} \quad \begin{matrix} \nearrow U_1 \\ \searrow U_2 \end{matrix} \text{ autovectores}$$

$$(A - kI) V = U \quad \left[U_3 \text{ una combinación lineal cualquiera de } U_1 \text{ y } U_2 \right]$$

6

Un autovalor k (triple)Tres autovectores U_1, U_2, U_3

Soluciones fundamentales

$$x_1 = U_1 e^{kt}$$

$$x_2 = U_2 e^{kt}$$

$$x_3 = U_3 e^{kt}$$

③

Un autovalor real k (doble)
un solo autovector U

Soluciones fundamentales

$$X_1(t) = \vec{U} e^{kt}$$

$$X_2(t) = \vec{U} t e^{kt} + \vec{V} e^{kt} = (\vec{U}t + \vec{V}) e^{kt}$$

Siendo

$$\begin{cases} (A - kI)\vec{U} = \vec{0} & \text{(autovector)} \\ (A - kI)\vec{V} = \vec{U} \end{cases}$$

La otra solución fundamental es la que
corresponde a la otra raíz real

④

Un autovalor k (triple)
un solo autovector U

$$X_1 = \vec{U} e^{kt}$$

$$X_2 = (\vec{U}t + \vec{V}) e^{kt}$$

$$X_3 = \left(\frac{1}{2} \vec{U} t^2 + \vec{V}t + \vec{W} \right) e^{kt}$$

Siendo

$$\begin{cases} (A - kI)\vec{U} = \vec{0} & \text{(autovalor)} \\ (A - kI)\vec{V} = \vec{U} \\ (A - kI)\vec{W} = \vec{V} \end{cases}$$

b) La solución particular del problema de Cauchy se obtiene determinando el valor apropiado de c_1 , c_2 y c_3 en la solución general

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2 \cdot 0} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ -c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_3 \\ -c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 \neq 1 \\ c_1 + c_3 = 1 \\ c_1 - c_2 - c_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{2}{3} \\ c_2 = \frac{1}{3} \\ c_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Luego, la solución del Problema de Cauchy es

$$X = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$