Ecuaciones diferenciales

Examen

Septiembre 2022

1) Se considera la ecuación

$$\left(3y^3x + 4y\right)dx + \left(x^2y^2 - 2x\right)dy = 0$$

a) Compruebe que no es diferencial exacta

b) Determine un factor integrante $\mu = x^\alpha y^\beta$, donde α y β son números enteros

c) Resuelva la ecuación

a) Una ecuación

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

es una diferencial exacta si existe $W(x,y)$ tal que

función potencial

$$dW = \frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy$$

lo que significa

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad [*]$$

Para ver si es una diferencial exacta comprobamos [*]

$$[1] \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3y^3x + 4y\right) = 9xy^2 + 4$$

$\neq$

$$[2] \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2 - 2x\right) = 2xy^2 - 2$$

Como son distintos, $[1] \neq [2]$, diferencial No es exacta

b) Vamos a buscar un factor integrante

$$\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$$

de modo que

$$(3y^3x + 4y)\mu\, dx + (x^2y^2 - 2x)\mu\, dy = 0$$

sea una una diferencial exacta viendo si se verifica [*]

[2] $$\frac{\partial}{\partial y}(3y^3x + 4y)x^{\alpha}y^{\beta} = \frac{\partial}{\partial y}\left[3y^{3+\beta}x^{\alpha+1} + 4x^{\alpha}y^{\beta+1}\right]$$

$$= x^{\alpha}y^{\beta}\left[3(\beta+3)xy^2 + 4(\beta+1)\right]$$

[3] $$\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 - 2x)x^{\alpha}y^{\beta} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x^{\alpha+2}y^{\beta+2} + 2x^{\alpha+1}y^{\beta}\right] =$$

$$= x^{\alpha}y^{\beta}\left[(\alpha+2)xy^2 - 2(\alpha+1)\right]$$

Para que [2] = [3]

$$\begin{cases} 3(\beta+3) = \alpha+2 \\ 4(\beta+1) = -2(\alpha+1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\beta - \alpha = -7 \\ 4\beta + 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

con lo cual el factor integrante es

$$\mu = x^{1}y^{-2} = \frac{x}{y^2}$$

c) Resolvemos la ecuación, exacta,

$$P\mu\, dx + Q\mu\, dy = 0$$

que queda

$$P\mu = (3y^3x + 4y)\cdot\frac{x}{y^2} = 3yx^2 + 4\frac{x}{y}$$

$$Q\mu = (x^2y^2 - 2x)\,\frac{x}{y^2} = x^3 - 2\frac{x^2}{y^2}$$

$\boxed{\text{comprobación}}$ de que $P\mu\, dx + Q\mu\, dy = 0$ es diferencial exacta. En efecto,

$$\frac{\partial P\mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(3yx^2 + 4\frac{x}{y}\right) = 3x^2 - \frac{4x}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q\mu}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 2\frac{x^2}{y^2}\right) = 3x^2 - \frac{4x}{y^2}$$

Resolvemos, pues, la ~~ecuación~~ exacta

$$\boxed{\left(3yx^2 + 4\frac{x}{y}\right)dx + \left(x^3 - 2\frac{x^2}{y^2}\right)dy = 0}$$

Para ello buscamos la función $W(x,y)$ que verifica que

[3] $$\frac{\partial W}{\partial x} = 3yx^2 + 4\frac{x}{y} \quad ; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = x^3 - 2\frac{x^2}{y^2}$$ [4]

de este modo la solución será

$$dW = 0 \implies W = cte$$

4

Si $\frac{\partial W}{\partial x} = 3yx^2 + 4\frac{x}{y} \Rightarrow$

$$\Rightarrow W = \int \left(3yx^2 + 4\frac{x}{y}\right) dx =$$

$$= x^3 y + \frac{2x^2}{y} + \varphi(y) \qquad [5]$$

Calculando de dos maneras diferentes $\frac{\partial W}{\partial y}$ e igualandos

$$[5] \quad \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[x^3 y + \frac{2x^2}{y} + \varphi(y)\right] = x^3 - \frac{2x^2}{y^2} + \varphi'(y)$$

$$[4] \quad \frac{\partial W}{\partial y} = x^3 - \frac{2x^2}{y^2}$$

[5] = [4]
$\frac{\partial W}{\partial x} = Q\mu$

Igualando estas dos expresiones

$$x^3 - \frac{2x^2}{y^2} + \varphi'(y) = x^3 - \frac{2x^2}{y^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(y) = 0 \Rightarrow \varphi = C \ (\text{cte})$$

Así pues

$$W(x,y) = x^3 y + \frac{2x^2}{y}$$

La solución es $\boxed{x^3 y + \frac{2x^2}{y} = C}$

Si deshacemos el cambio de variable

$$x = e^{t} \Rightarrow t = \ln(x)$$

$$y = c_1 e^{n\ln(x)} + c_2 e^{-n\ln(x)}$$

$$\boxed{y = c_1 x^{n} + c_2 x^{-n}}$$

$$e^{n\ln(x)} = \left[e^{\ln(x)}\right]^{n}$$

b) si

$$y(a) = c_1 a^{n} + c_2 a^{-n} = 0$$

multiplicando por a^{n}

$$c_1 a^{2n} + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 a^{2n}$$

La solución general ~~queda~~ queda para la condición $y(a)=0$

$$y = c_1 x^{n} - c_1 a^{2n} x^{-n}$$

$$y = c_1 \left[x^{n} - a^{2n} x^{-n}\right]$$

c) dividiendo por a^{n}

$$y = c_1 \left[\frac{x^{n}}{a^{n}} - a^{n} x^{-n}\right]$$

$$\boxed{y = C\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{n} - \left(\frac{a}{x}\right)^{n}\right]}$$

Hacemos los cambios en la ecuación

$$\underbrace{e^{2t}}_{x^2}\underbrace{\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right]}_{y''}+\underbrace{e^{t}}_{x}\underbrace{\left[\frac{dy}{dt}e^{-t}\right]}_{y'}-n^2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}+\frac{dy}{dt}-n^2y=0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}+n^2y=0$$

Es una ecuación lineal homogenea con coeficientes constantes

Buscamos una solución general

- Polinomio característico

$$r^2-n^2=0 \quad \Rightarrow r^2=n^2$$

tiene dos raíces

$$r_1=n \qquad r_2=-n$$

con lo cual la solución general es

$$y=c_1e^{nt}+c_2e^{-nt}$$

2) Considere la ecuación de Euler

$$x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$$

donde n es un número natural. Se pide

a) Su solución general

b) El conjunto de soluciones que satisfacen $y(a)=0$ $(a \neq 0)$

c) Demostrar que el conjunto hallado en b) puede expresarse de la forma

$$y = C a^n \left[\left(\frac{x}{a}\right)^n - \left(\frac{a}{x}\right)^n \right] \quad \text{con } C = \text{cte.}$$

¿Qué es una ecuación de Euler?

Es una ecuación lineal de orden dos con coeficientes variables de la forma

$$x^2 y'' + a x y' + b y = F(x)$$

que mediante el cambio $x = e^t$

se reduce a una ec. lineal de coeficientes constantes

En nuestro caso

$$x^2 y'' + x y' - n^2 y = 0$$

Hacemos el cambio $\boxed{x = e^t}$

como

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t}$$ (1ª derivada)

Haciendo la la 2ª derivada

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{dt}{dt} \cdot \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] = \frac{dt}{dx} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= \frac{dt}{dx}\left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= e^{-t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} e^{-t} - \frac{dy}{dt} e^{-t}\right] =$$

$$= e^{-2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$ (2ª derivada)

```
(%i1) ec:x^2·'diff(y,x,2)+x·'diff(y,x)-n^2·y=0;
```

(%o1) $$x^2\left(\frac{d^2}{d\,x^2}\,y\right)+x\left(\frac{d}{d\,x}\,y\right)-n^2\,y=0$$

```
(%i2) ode2(ec,y,x);
```

Is n zero or nonzero?

nonzero;

(%o2) $$y=\%k1\,x^{\frac{\sqrt{4\,n^2}}{2}}+\frac{\%k2}{x^{\frac{\sqrt{4\,n^2}}{2}}}$$

```
(%i4) expand(%);
```

(%o4) $$y=\%k1\,x^{|n|}+\frac{\%k2}{x^{|n|}}$$

```
(%i6) load (contrib_ode);
```

(%o6) */usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima*

```
(%i7) contrib_ode(ec,y,x);
```

*Is n zero or nonzero?*nonzero;

(%o7) $$\left[y=\%k1\,x^{\frac{\sqrt{4\,n^2}}{2}}+\frac{\%k2}{x^{\frac{\sqrt{4\,n^2}}{2}}}\right]$$

3 Del sistema de ecuaciones

$$X'(t) = AX(t)$$

de solución general

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^t \\ y(t) = c_1 t e^t + c_2 e^t \end{cases}$$

a) Obtenga dos soluciones linealmente independientes, y una matriz fundamental $M(t)$.

b) A partir de la $M(t)$ hallada, y aplicando el teorema de caracterización de las matrices fundamentales, deduzca que la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Tipo y estabilidad del punto crítico $(0,0)$

a).

Si escribimos la solución general que nos dan en el enunciado en notación matricial

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

Luego ~~dos~~ soluciones fundamentales son

$$\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix} \; ; \; \vec{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$$

La matriz fundamental $M(t)$ es la que tiene por columnas esas soluciones fundamentales

$$M(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix}$$

b) El teorema de caracterización de las matrices fundamentales es (pag. 222)

Tma La condición necesaria y suficiente para que la matriz $M(t)$ derivable cualquiera, sea matriz fundamental del sistema lineal

$$\vec{X}'(t) = A(t)\vec{X}(x)$$

Es que verifique:

1) $\frac{dM(t)}{dt} = A(t)\,M(t)$

2) $M(t_0) \neq 0$ en algún $t_0 \in D$

(D = dominio de existencia de t)

2 $\det M(t) = \det\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = e^{2t} \neq 0 \quad \forall t$

1) comprobamos que $\frac{dM(t)}{dt} = A\,M(t)$. En efecto

$$\frac{dM(t)}{dt} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t + e^t & e^t \end{pmatrix}$$

$$A\,M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ te^t & e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ e^t + te^t & e^t \end{pmatrix}$$

c) Para ver la estabilidad en el punto $(0,0)$ estudiamos los autovalores de la matriz A

$$p(m) = \det\begin{pmatrix} 1-m & 0 \\ 1 & 1-m \end{pmatrix} = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2 = 0$$

$\Rightarrow m = 1$ (doble)

(Ver pag 280)

Son dos autovalores

$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

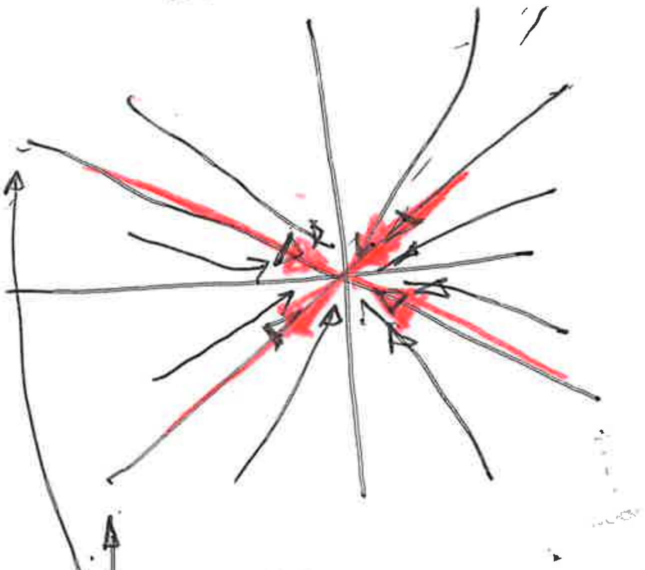
Se trata de Nodo Inestable

$\boxed{\text{ESTABILIDAD}}$ (Resumen)

- Dos autovalores reales distintos k_1 y k_2

$k_1 < 0 \quad k_2 < 0$

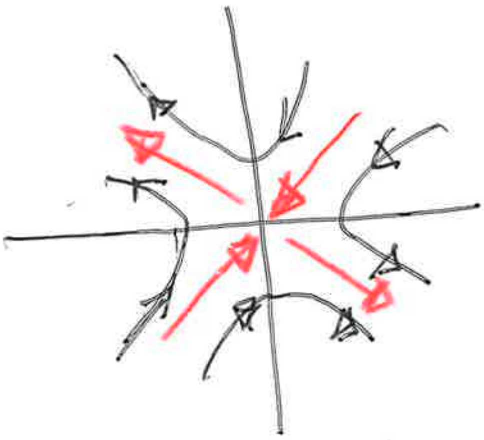
sumidero estable



autovectores entrando las trayectorias

$k_1 < 0 \quad k_2 > 0$

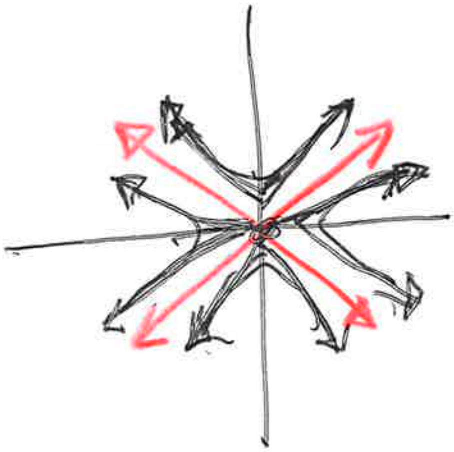
punto de silla



entran por una dirección y salen por otra

$k_1 > 0$ $k_2 > 0$

fuente inestable



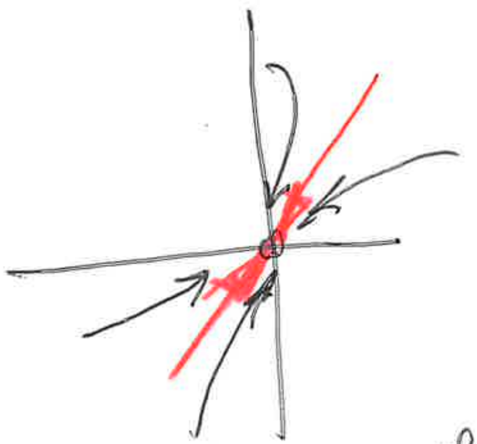
- Un autovalor doble

$k_1 = k_2$ negativo

nodo estable

$k_1 = k_2$ positivo

nodo inestable



entra o sale

- autovalores complejos conjugado $a \pm bi$

velocidad a la que gira

$a < 0$

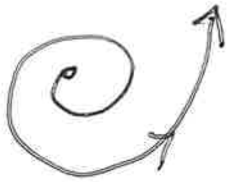
Espiral Estable

$a < 0$

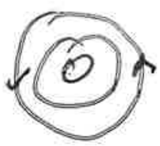
Espiral Inestable

$a = 0$

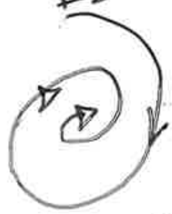
Periódico.



parte real positiva



parte real cero



parte real negativa

Vamos a estudiar el sistema

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'(t) = x(t) \\ y'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

```
(%i2) ec1:'diff(x(t),t)=x(t);
      ec2:'diff(y(t),t)=x(t)+y(t);
```

(%o1) $\frac{d}{d\,t}x(t)=x(t)$

(%o2) $\frac{d}{d\,t}y(t)=y(t)+x(t)$

```
(%i4) desolve([ec1,ec2],[x(t),y(t)]);
```

(%o4) $\left[x(t)=x(0)\,\%e^{t},y(t)=x(0)\,t\,\%e^{t}+y(0)\,\%e^{t}\right]$

```
(%i1) load(plotdf);
(%o1) C:/maxima-5.46.0/share/maxima/5.46.0/share/dynamics/p

(%i3) plotdf([x,x+y]);
(%o3) C:/Users/Angel/AppData/Local/Temp/maxout18732.xmaxi
```