Complementos de Matemáticas

EXÁMENES 2019

- Junio A
- Junio B
- Septiembre

allave@madrid.uned.es

Junio 2019

Modelo A

PREGUNTAS CORTAS

$\boxed{\begin{array}{l} \text{2) Sea } d_\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \text{ la aplicación definida por} \\ \qquad d_\alpha(x,y) = |x^\alpha - y^\alpha| \\ \text{donde } \alpha\in\mathbb{N}. \text{ Estudie en función del parámetro } \alpha \\ \text{si } d_\alpha \text{ define una distancia} \end{array}}$

Veremos si $d_\alpha : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cumple $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ los axiomas de la definición de distancia

1. $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$; $d(x,y)=0 \Rightarrow x=y$

En efecto

$|x^\alpha - y^\alpha| \geq 0$; $|x^\alpha - y^\alpha| = 0 \Rightarrow x^\alpha = y^\alpha$

Esto no ocurre cuando α es par $[3^2 = (-3)^2]$

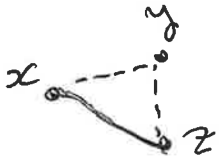
Esto sí ocurre cuando α es impar

2. $d(x,y) = d(y,x)$

En efecto

$d_\alpha(x,y) = |x^\alpha - y^\alpha| = |y^\alpha - x^\alpha| = d_\alpha(y,x)$

ocurre para cualquier α



c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$d_\alpha(x,z) = |x^\alpha - y^\alpha| = |x^\alpha - y^\alpha + z^\alpha - z^\alpha| \leq |x^\alpha - y^\alpha| + |y^\alpha - z^\alpha| =$

$= d_\alpha(x,y) + d_\alpha(y,z)$

En definitiva

$d_\alpha \to$ Es una distancia si α es impar

$d_\alpha \not\to$ No es una distancia si α es par

2) Sean $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por

$$f(x,y) = (y-1, x e^y) ; \quad g(x,y) = \cos(xy)$$

Se pide estudiar si $g \circ f$ es diferenciable, y en caso de lo sea, se pide derminar su diferencial

$g \circ f$ es una función diferenciable porque es la composición de aplicaciones diferenciables

Haciendo la composición

$$g \circ f(x,y) = g\left[f(x,y)\right] = g(y-1, x e^y) =$$

$$= \cos\left[(y-1) x e^y\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & g\left[f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] \end{array}$$

La diferencial de una aplicación en un punto es la aplicación lineal que mejor se aproxima a la función

Ejemplos: Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$Df(\vec{x})\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{x}) & D_2 f_1(\vec{x}) \\ D_2 f_1(\vec{x}) & D_2 f_2(\vec{x}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Si $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$Dg(\vec{x})\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \left(D_1 g(\vec{x}), D_2 g(\vec{x})\right)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

Diferencial de una composición de funciones

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \vec{x}_0 & \longmapsto & f(\vec{x}_0) & \longrightarrow & g[f(\vec{x}_0)] \end{array}$$

$$\underbrace{D(g \circ f)(\vec{x}_0)}_{\text{Matriz}} = \underbrace{Dg(f(\vec{x}_0))}_{\text{Matriz}} \cdot \underbrace{Df(\vec{x}_0)}_{\text{Matriz}}$$

La matriz de una composición de dos aplicaciones lineales es el producto de matrices

Determinaremos la diferencial de $g\circ f$ de dos maneras diferentes

1º/ Directamente.

$$g\circ f(x,y) = \cos((y-1)xe^y)$$

$$D(g\circ f) = \left(D_1(g\circ f)(x,y),\ D_2(g\circ f)(x,y)\right)$$

En donde:

$$D_1(g\circ f)(x,y) = -(y-1)e^y \sin((y-1)xe^y)$$

$$D_2(g\circ f)(x,y) = -\left(xe^y + (y-1)xe^y\right)\sin((y-1)xe^y)$$

Usar W-A o MAXIMA

2) Haciendo un producto de matrices

$$Df(\vec{x}) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(\vec{x}) & D_2 f_1(\vec{x}) \\ D_1 f_2(\vec{x}) & D_2 f_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

$$Dg[f(x,y)]$$

Para calcular esta diferencial, lo haremos

$$Dg(\alpha,\beta) = \left(D_1 g(\alpha,\beta),\ D_2 g(\alpha,\beta)\right)$$

y luego particularizaremos para

$$\alpha = y-1 \quad ; \quad \beta = xe^y$$

Teniendo en cuenta que

$$g(\alpha,\beta) = \cos(\alpha\beta)$$

$$D_1 g(\alpha,\beta) = -\beta \sin(\alpha\beta)$$

$$D_2 g(\alpha,\beta) = -\alpha \sin(\alpha,\beta)$$

Resulta que

$$D_1 g(y-1, xe^y) = -xe^y \sin((y-1)xe^y)$$

$$D_2 g(y-1, xe^y) = -(y-1) \sin((y-1)xe^y)$$

Así

$$Dg(y-1, xe^y) = \left(-xe^y \sin((y-1)xe^y), -(y-1)\sin((y-1)xe^y)\right)$$

La diferencial de $D(g\circ f)$ se puede obtener como un producto de matrices

$$D(g\circ f)(x,y) = Dg\begin{pmatrix} y-1 \\ xe^y \end{pmatrix} \cdot Df(x,y) =$$

$$= \left(-xe^y \sin((y-1)xe^y), -(y-1)\sin((y-1)xe^y)\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^y & xe^y \end{pmatrix}$$

$$= \Big(-(\sin(xe^y(y-1)))e^y(y-1),$$

$$-x(\sin(xe^y(y-1)))e^y - x(\sin(xe^y(y-1)))e^y(y-1)\Big)$$

$$= \left(-(y-1)e^y \sin(xe^y(y-1)), -(xe^y + (y-1)xe^y)\sin(xe^y(y-1)) \right)$$

Que coincide por el resultado obtenido por el método ~~directo~~

2 Sea la función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (2+x)(y^2-1)$$

Determine, si los hay, los puntos críticos de la función. ¿Qué condiciones conoce que garantizan que un punto crítico es extremo relativo?

Como f es una función diferenciable en $\mathbb{R}^2$, los puntos críticos son los que anulan en gradiente

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 - 1 = 0 \\ 2y(2+x) = 0 \end{cases}$$

La primera ecuación se anula cuando

$$\begin{cases} y = 1 \rightarrow 2 \cdot 1(2+x) = 0 \rightarrow x = -2 \\ y = -1 \rightarrow 2(-1)(2+x) = 0 \rightarrow x = -2 \end{cases}$$

Por consiguiente, son puntos críticos (9)

$$(-2,1) \quad y \quad (-2,-1)$$

Para estudiar si son extremos relativos tenemos que estudiar la forma cuadrática dada por la matriz hessiana en estos puntos

Si es definida positiva $\to$ mínimo

es definida negativa $\to$ máxima

En nuestro caso

$$D_1 f(x,y) = y^2 - 1$$
$$D_2 f(x,y) = 2y(2+x)$$

$$D_{11} f(x,y) = 0$$
$$D_{12} f(x,y) = D_{21} f(x,y) = 2y$$
$$D_{22} f(x,y) = 2(2+x)$$

La matriz Hessiana es

$$H = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2(2+x) \end{pmatrix}$$

$$H(-2,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(-2,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Como

$$f(\vec{x}_0+\vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{\cancel{Df(\vec{x}_0)(\vec{h})}}_{0} + \frac{1}{2}\, D^2 f(\vec{x}_0)(\vec{h}) + \dots$$

siendo:

Aplicación lineal

$$Df(\vec{x}_0) = \left(D_1 f(x_0),\ D_2 f(x_0)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

Forma cuadrática

$$D^2 f(x_0) = (h_1\ h_2)\begin{pmatrix} D_{11} f(x_0) & D_{12} f(x_0) \\ D_{12} f(x_0) & D_{22} f(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$

$$= D_{11} h_1^2 + 2 D_{12} h_1 h_2 + D_{22} h_2^2$$

En el punto $(-2,1)$

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \underbrace{(h_1\ h_2)\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}}_{(*)} + \dots$$

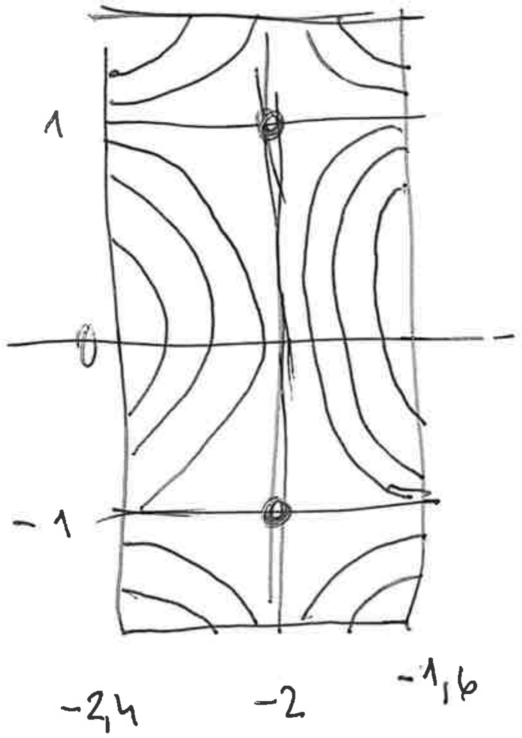
$(*) = 4 h_1 h_2$ (es indeterminado, su signo depende de la elección de h_1 y h_2)

En el punto $(-2,-1)$

$$(h_1\ h_2)\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -4 h_1 h_2$$

es indeterminado porque el signo depende de la elección de h_1 y h_2

Haciendo la gráfica de las curvas de nivel (usando W-A)



4) Sea $\vec{x}(u,v)$ para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ la parametrización de una superficie. Defina punto regular de la superficie y explique qué significa que una parametrización es regular

Se dice que ~~un~~ punto de la superficie $\vec{x}(u_0,v_0)$ es regular si $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ es linealmente independiente y así constituyen la base del plano tangente

Esto es equivalente a que

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$$

Una parametrización es regular si todos sus puntos son regulares

$$\begin{cases} t^3 - t = 0 & [1] \\ \cos(\pi t) = -1 & [2] \\ t^2 - 1 = 0 & [3] \end{cases}$$

La primera ecuación tiene dos soluciones

$t_1 = 1 \qquad t_2 = -1$

El valor $t_1 = 1$
verifica [3]
verifica [2]
verifica [1]

El valor $t_2 = -1$
verifica [3]
verifica [2]
verifica [1]

Por consiguiente

$$\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = (0,-1,0)$$

Se trata de un punto múltiple

b) En una parametrización cualquiera, la curvatura es

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$$

En nuestro caso

$\vec{x}'(t) = (3t^2-1, -\pi \sin(\pi t), 2t) \rightarrow \vec{x}'(0) = (-1,0,0)$

$x''(t) = (6t, -\pi^2 \cos(\pi t), 2) \longrightarrow \vec{x}''(0) = (0, -\pi^2, 2)$

$\|\vec{x}'(0)\| = \sqrt{(-1)^2+0^2+0^2} = 1$

$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-1,0,0) \times (0,-\pi^2,2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= (0, 2, \pi^2)$

$\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\| = \sqrt{0^2+2^2+(\pi^2)^2} = \sqrt{\pi^4+4}$

EJERCICIOS

(5) Sea C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3 - t, \cos(\pi t), t^2 - 1)$$

para $t \in [-2, 2]$

a) Estudie si es una curva regular y si $(0,-1,0)$ es un punto múltiple de la curva

b) Determine la curvatura en $\vec{x}(0)$

c) Determine la torsión de C en $\vec{x}(0)$

d) Determine el triedro de Frenet en $\vec{x}(0)$

a) La curva es regular donde el vector derivada $\vec{x}'(t) \neq \vec{0}$ [cuando $\vec{x}'(t) = \vec{0}$ el punto es singular]

Como $\vec{x}'(t) = (3t^2 - 1, -\pi \sin(\pi t), 2t)$

En los puntos singulares se verifican simultaneamente

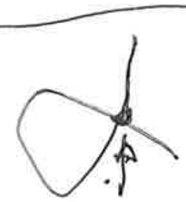
$$\begin{cases} 3t^2 - 1 = 0 \\ -\pi \sin(\pi t) = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

si se cumple la tercera ecuación $t = 0$, para ese valor no se anula la primera ecuación

Por consiguiente la curva es regular

b) Para que $(0,-1,0)$ sea ~~un~~ punto múltiple tiene que existir, al menos dos valores distintos t_1 y t_2 tal que

$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) = (0,-1,0)$$



$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2)$

Esto significa que el sistema siguiente tiene, al menos, dos soluciones

Así resulta

$$\kappa(0) = \frac{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|}{\|\vec{x}'(0)\|^3} = \frac{\sqrt{\pi^4 + 4}}{1} = \sqrt{\pi^4+4}$$

c) En las curvas con una parametrización cualquiera
La torsión es

$$\tau(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{\| x'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2}$$

En nuestro caso

$\vec{x}'(0) = (-1,0,0)$; $\vec{x}''(0) = (0, -\pi^2, 2)$

$\vec{x}'''(t) = (6, \pi^3 \sin(\pi t), 0) \to \vec{x}'''(0) = (6,0,0)$

$$\det[\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)] = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\pi^2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto la torsión en $\vec{x}(0)$ son

$$\tau(0) = \frac{0}{\sqrt{\pi^4+2}} = 0$$

d) El triedro de Frenet $\{\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$
En una parametrización cualquiera
los vectores del triedro de Frenet son unitarios

$$\begin{cases} \vec{t} \to \text{tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \\ \vec{b} \to \text{tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \\ \vec{n} \to \text{tiene la dirección de } [\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) \end{cases}$$

$\vec{t}(0)$ tiene la dirección de $\vec{x}'(0) = (-1,0,0)$ [tiene módulo $=1$]

$$\vec{t} = (-1,0,0)$$

$\vec{n}(0)$ tiene la dirección de

$$\left[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\right] \times \vec{x}'(0) =$$

$$= \left[(-1,0,0) \times (0,-\pi^2,2)\right] \times (-1,0,0) =$$

$$= (0,2,\pi^2) \times (-1,0,0) = (0,-\pi^2,2)$$

Normalizando

$$\vec{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{0^2+(-\pi^2)^2+2^2}}(0,-\pi^2,2) =$$

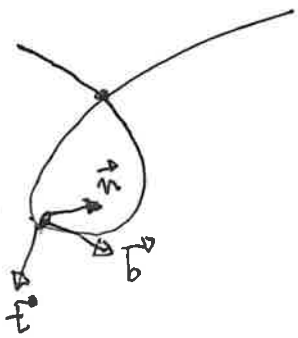
$$\vec{n}(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}}(0,-\pi^2,0)$$

$\vec{b}(0)$ tiene la dirección de

$$\left[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\right] = (0,2,\pi^2)$$

Normalizando

$$\vec{b} = \frac{1}{\sqrt{\pi^4+4}}(0,2,\pi^2)$$



6) Sea S la superficie dada por

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, v e^{u})$$

a) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental

b) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental

c) Clasifique los puntos de la superficie

d) Con la parametrización $\vec{x}(u,v) = (u, v, v e^{u})$ de S, compruebe que las curvas $v = u+1$ y $v = -u+1$ verifican la ecuación diferencial de las líneas de curvatura que pasan por $\vec{x}(0,1)$. Para ello, determine primero esta ecuación diferencial y compruebe que estas curvas la verifican

a) Para determinar los coeficientes de la 1ª forma fundamental

$$\mathrm{I}(du,dv) = (du,dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

(determina un producto escalar en el plano tangente)

$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u$; $F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$; $G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v$

$(du, dv) \to$ es un vector del plano tangente

En nuestro caso $\vec{x} = (u, v, ve^u)$

$\vec{x_u} = (1, 0, ve^u)$; $\vec{x_v} = (0, 1, e^u)$

$$\left.\begin{aligned} E &= (1,0,ve^u)\cdot(1,0,ve^u) = 1 + v^2e^{2u} \\ F &= (1,0,ve^u)(0,1,e^u) = ve^{2u} \\ G &= (0,1,e^u)(0,1,e^u) = 1+e^{2u} \end{aligned}\right\}$$

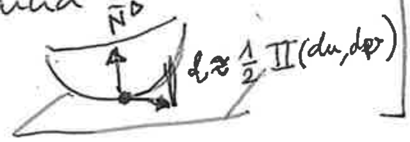
coeficientes I forma fundamental en un punto $\vec{x}(u,v)$

b) Para calcular la segunda forma fundamental

$$\text{II}(du,dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= e(du)^2 + 2f\, du dv + g(dv)^2$$

[la II forma fundamental mide la distancia al plano tangente



]

$L = e = \vec{x}_{uu}\cdot\vec{N}$; $M = f = \vec{x}_{uv}\cdot\vec{N}$ $N = g = \vec{x}_{vv}\cdot\vec{N}$

En nuestro caso:

$$\vec{N} = \frac{\vec{x_u}\times\vec{x_v}}{\|\vec{x_u}\times\vec{x_v}\|}$$ (vector normal a la superficie)

$$\vec{x_u}\times\vec{x_v} = (1,0,ve^u)\times(0,1,e^u) = (-ve^u, -e^u, 1)$$

$$\|\vec{x_u}\times\vec{x_v}\| = \sqrt{v^2e^{2u}+e^{2u}+1} = \sqrt{*}$$ $[* = v^2e^{2u}+e^{2u}+1]$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-ve^u, -e^u, 1)$$

$\vec{x}_{uu} = (0,0,ve^u)$, $\vec{x}_{uv} = (0,0,e^u)$; $\vec{x}_{vv} = (0,0,0)$

$$L = e = \vec{N}\cdot\vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-ve^u,-e^u,1)\cdot(0,0,ve^u) = \frac{1}{\sqrt{*}}\cdot ve^u$$

$$N = f = \vec{N}\cdot\vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-ve^u,-e^u,1)\cdot(0,0,e^u) = \frac{1}{\sqrt{*}}\, e^u$$

$$N = g = \vec{N}\cdot\vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-ve^u,-e^u,1)\cdot(0,0,0) = 0$$

c) Para clasificar los puntos de una superficie S tenemos que estudiar

$$LN - M^2 = eg - f^2 = \frac{1}{\sqrt{*}}\, ve^u\cdot 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{*}}\, e^u\right)^2$$

$$= -\frac{1}{\underbrace{v^2e^{2u}+e^{2u}+1}_{\text{siempre positivo}}}\, e^{2u} < 0$$

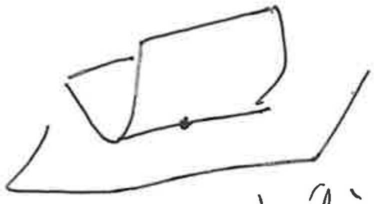
Esta expresión es siempre negativa por tanto todos sus puntos son hiperbólicos

elípticos

$eg - f^2 > 0$

hiperbólicos

$eg - f^2 < 0$



parabólico

$eg - f^2 = 0$

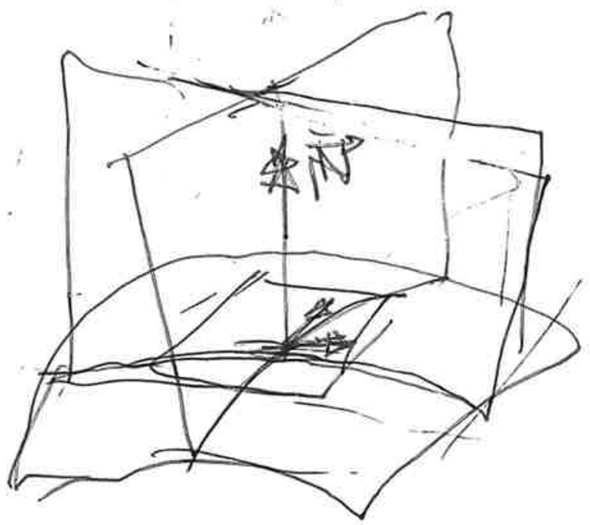
19

d) Para el punto $\vec{x}(0,1) = (0,1,1)$, el vector $\vec{N}$ y los coeficientes de las formas fundamentales son

$$\begin{cases} \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1) \\ E = 2; \quad F = 1; \quad G = 2 \\ e = 1; \quad f = 1; \quad g = 0 \end{cases}$$

Recordatorio

- Secciones normales en una superficie



Si la sección es según la dirección (h, k) del plano tangente

La curva que resulta tendrá un vector de curvatura (que solo tiene componente normal $\vec{k_n}$)

$$\vec{k} = \underbrace{\vec{k_n}}_{\text{en la dirección de } \vec{N}} + \underbrace{\vec{k_g}}_{\text{geodésica en el Plano tangent}}$$

$$k_n(h,k) = \frac{\mathrm{II}(h,k)}{\mathrm{I}(h,k)}$$

- Direcciones principales, son las que hacen máxima y mínima las curvaturas normales

Si k_1 y k_2 son las curvaturas máxima y mínima (curvaturas principales)

$$\frac{K_1+K_2}{2} = \text{curvatura media} = \frac{1}{2}\,\frac{Eg-2fF+Ge}{EG-F^2}$$

$$K_1 \cdot K_2 = \text{curvatura total o gaussiana}$$

$$= \frac{eg-f^2}{EG^2-F^2}$$

Si K_1 y K_2 son las curvaturas principales, son las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \lambda^2 - \left\{ \begin{vmatrix} E & f \\ F & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} F & e \\ G & f \end{vmatrix} \right\} \lambda + \begin{vmatrix} e & f \\ f & g \end{vmatrix} = 0$$

$$(EG-F^2)\lambda^2 - (Eg-2Ff+Ge)\lambda + (eg-f^2) = 0$$

- <u>Líneas de curvatura</u>

Una curva γ sobre una superficie S se dice que es una <u>línea de curvatura</u> si la recta tangente en cada uno de sus puntos coincide con una dirección principal (curvaturas normales máxima y mínima)

La ecuación diferencial que verifican las líneas de curvatura es

$$(eF-fE)(du)^2 + (eG-gE)\,du\,dv + (fG-gF)(dv)^2 = 0$$

Por cada punto no umbilical pasan dos líneas de curvatura que son ortogonales

Si en la ecuación diferencial

$$(eF - fE)(du)^2 + (eG - gE)\,du\,dv + (fG - gF)(dv)^2 = 0$$

Sustituimos los valores de nuestro caso

$E=2$; $F=1$; $G=2$; $e=1$; $f=1$; $g=0$

tenemos

$$-(du)^2 + 2\,du\,dv + 2(dv)^2 = 0$$

$$-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

Para la curva $v = u+1$

$$\begin{cases} u = t \\ v = t+1 \end{cases} \rightarrow \quad \frac{du}{dt} = 1, \quad \frac{dv}{dt} = 1$$

$$\gamma \equiv (t,\ t+1,\ (t+1)e^t)$$

En nuestro caso la ecuación diferencial

$$-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

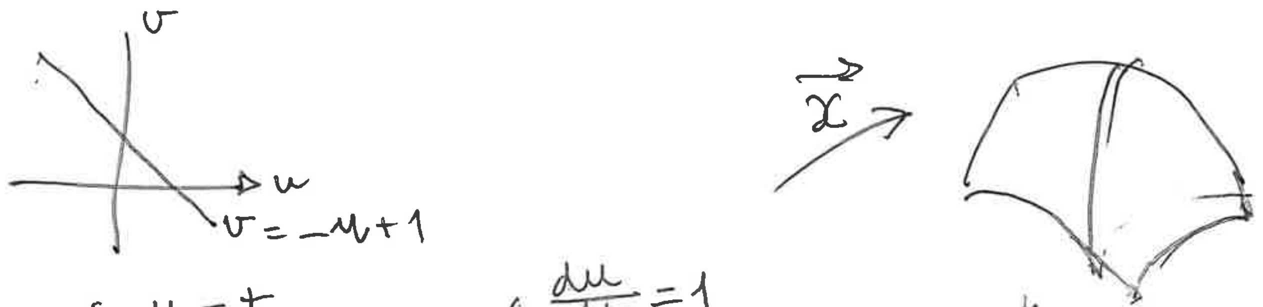
resulta

$$-1^2 + 2\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1^2 =$$

$$= -1 + 2 + 2 = 3 \neq 0$$

No verifica la ecuación diferencial.

Para la curva $v = -u+1$



$$\left\{\begin{array}{l} u = t \\ v = -t+1 \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = 1 \\ \dfrac{dv}{dt} = -1 \end{array}\right.$$

$\gamma = (t, -t+1, (-t+1)e^{t})$

Sustituyendo en la ecuación

$$-\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2\,\frac{du}{dt}\cdot\frac{dv}{dt} + 2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 0$$

tenemos

$$-(1)^2 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 2(-1)^2 =$$

$$= -1 - 2 + 2 = -1 \neq 0$$

no se verifica.

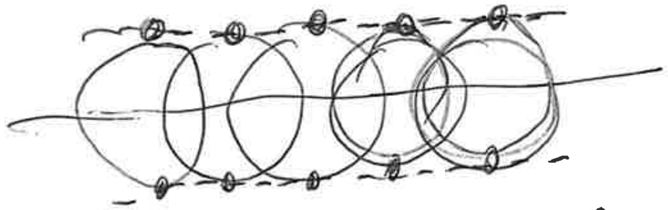
Complementos de matemáticas

Junio 2019
modelo B

PEGUNTAS CORTAS

1 Sea $\{\vec{x}(\lambda,t)\}_{\lambda\in[a,b]}$ una familia de curvas planas regulares. Defina su envolvente

Se dice que una curva es <u>envolvente</u> de una familia de curvas cuando en cada punto es tangente a alguna curva de la familia, y además, no está incluida en la familia de curvas



Ejemplo:
La familia de circunferencias (en implícitas)

$$\{(x-\lambda)^2+y^2=R^2\} \equiv F(x,y,\lambda)=0$$

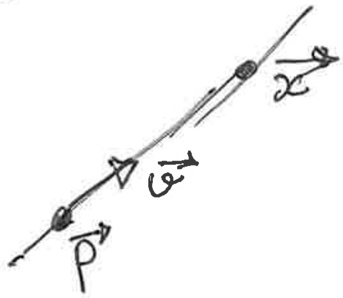
tiene por envolvente

$$\boxed{\begin{cases} F(x,y,\lambda)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}F(x,y,\lambda)=0 \end{cases}} \qquad \begin{cases} -2(x-\lambda)=0 \\ (x-\lambda)+y^2=R^2 \rightarrow y^2=R^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underbrace{y=+R \ ; \ y=-R}_{\text{envolvente.}}$$

3) Demuestre que la curvatura de una recta es cero

Para demostrarlo escribamos una recta que apoya en $\vec{p}$ y lleva la dirección $\vec{v}$. - Si $\vec{v}$ es un vector unitario tenemos a la recta parametrizada por la longitud de arco



$$\vec{x}(s) = \vec{p} + s\vec{v}$$

el vector tangente

$$\vec{t} = \frac{d\vec{x}(s)}{ds} = \vec{v}$$

Como vemos el vector tangente no ~~siempre~~ no varía, es siempre $\vec{v}$

La curvatura es la medida del cambio de dirección del vector tangente

$$\chi = \left\| \frac{d\vec{t}}{ds} \right\|$$

En nuestro caso $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$

y por tanto $\chi = 0$

4 Sea la curva C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = \left(t^2-1, t^3-t, \sin(2\pi t)\right)$$

para $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Se pide estudiar si $(0,0,0)$ es un punto múltiple

Para que un punto sea múltiple debe haber dos valores distintos de t, que llamamos t_1 y t_2, que esten en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tales que

$$\vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2) = (0,0,0)$$

Estudiamos las posibles soluciones del sistema

$$\begin{cases} t^2-1=0 & [1] \\ t^3-t=0 & [2] \\ \sin(2\pi t)=0 & [3] \end{cases}$$

La primera ecuación [1] solo tiene dos posibles soluciones

$\underline{t=1}$

verifica [1]
verifica [2]
verifica [3]

$\underline{t=-1}$

verifica [1]
verifica [2]
verifica [3]

Así resulta que $1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $-1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
y que $\vec{x}(1) = \vec{x}(-1) = (0,0,0)$ luego

$(0,0,0)$ ES UN PUNTO MÚLTIPLE

EJERCICIOS

5) Sea f la función dada por

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

Sean los conjuntos

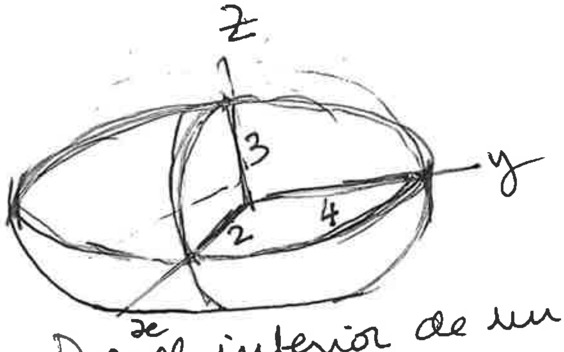
$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9} \leq 1 \right\}$$

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9} = 1 \right\}$$

a) Determine los posibles puntos donde f alcanza extremos relativos en el conjunto D

b) Localize los posibles extremos relativos de la función sobre S

c) ¿Se alcanzan los extremos absolutos en D? Razone la respuesta. Si la respuesta es afirmativa, indique en qué puntos de D se alcanzan los extremos absolutos dentro de D.



Las superficies de nivel de f
$x^2+y^2+z^2 = K$
son esferas concentricas de centro en el origen

$f(x,y,z)$ es el cuadrado de la distancia al origen

D es el interior de un elipsoide
S es la frontera de un elipsoide

Este problema se puede resolver de una manera intuitiva.

Un mínimo relativo y global de f se alcanza en el punto $(0,0,0)$.

No hay máximos relativos.

El máximo global se alcanza en la frontera de D, es decir en S, en los puntos más alejados del origen, $(0,4,0)$ y $(0,-4,0)$

Es decir, en el punto, $(0,4,0)$ y $(0,-4,0)$

a) Los extremos relativos se encuentran en los puntos que anulan el gradiente

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

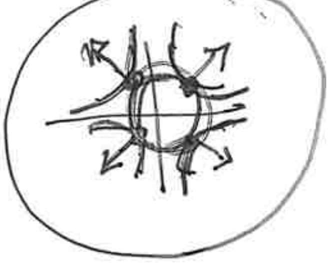
Está claro, sin necesidad de estudiar el Hessiano, que se trata de un mínimo

$f(0,0,0) = 0$ mínimo relativo y absoluto

el origen es el centro de de la familia de esferas que son las superficies de nivel de f

b) Para buscar los extremos en S utilizamos el método de los multiplicadores de Lagrange:

Los extremos de $f(x,y,z)$ condicionado por $g(x,y,z)=0$ verifican



$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

En nuestro caso $\begin{cases} f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 \\ g(x,y,z) = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} \\ 2y = \lambda \frac{y}{8} \\ 2z = \lambda \frac{2z}{9} \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^3}{9}=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x\left(2-\frac{\lambda}{2}\right)=0 & [1] \\ y\left(2-\frac{\lambda}{8}\right)=0 & [2] \\ 2z\left(1-\frac{\lambda}{9}\right)=0 & [3] \\ \frac{x^4}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^3}{9}=1 & [4] \end{cases}$$

Observando las cuatro ecuaciones, para que se verifiquen todas las ecuaciones hay que hacer dos de las incógnitas igual a 0 y deducir de [4] el valor restante y determinar el λ correspondiente

Haciendo $x=0$, $y=0$; $\lambda=9$

$$\frac{0^2}{4}+\frac{0^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1 \Rightarrow z=\pm 3$$

$(0, 0, \pm 3)$

$$2z\left(1-\frac{\lambda}{9}\right)=0 \Rightarrow \lambda=9$$

Haciendo $x=0$, $z=0$; $\lambda=16$

$(0, \pm 4, 0)$

Haciendo $y=0$, $z=0$; λ

$(\pm 2, 0, 0)$

Como $f(0,0,\pm 3)=9$

$f(0,\pm 4,0)=16$ (Máximo absoluto en S y en D.)

$f(\pm 2, 0, 0)=4$

6) Sea S la superficie parametrizada, para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ por

$$\vec{x}(u,v) = (u+v,\ u-v^2,\ u^2+v)$$

a) Determine los puntos singulares de esta parametrización

b) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental donde la superficie sea regular

c) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental donde la superficie sea regular

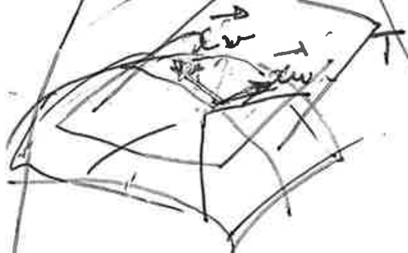
d) Sea C la curva incluida en S, definida por $\alpha(t) = (t, t, t^2)$ para $t\in\mathbb{R}$

Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$

a) La parametrización es regular en los puntos en los que $\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq (0,0,0)$

En nuestro caso

$\vec{x}_u = (1, 1, 2u)$; $\vec{x}_v = (1, -2v, 1)$



$\langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle =$

$=$ Plano tangente

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = (1,1,2u)\times(1,-2v,1) =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -2v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (4uv+1,\ 2u-1,\ -2v-1)$$

Son puntos singulares los que verifican simultaneamente

$$\begin{cases} 4uv + 1 = 0 & [1] \\ 2u - 1 = 0 & [2] \\ -2v - 1 = 0 & [3] \end{cases}$$

de la ecuación [3] se deduce que $v = -1/2$

de la ecuación [2] se deduce que $u = \frac{1}{2}$

Comprobamos que estos valores verifican [1]

Por tanto $\vec{x}\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

es un punto singular de la parametrización

b) Los coeficientes de la primera forma fundamental

$$I(du, dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u$; $F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v$ $G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v$

En nuestro caso

$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 1, 2u) \cdot (1, 1, 2u) = 2 + 4u^2$

$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1, 1, 2u)(1, -2v, 1) = 1 + 2u - 2v$

$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (1, -2v, 1)(1, -2v, 1) = 2 + 4v^2$

c) Para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$II(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= e\,(du)^2 + 2f\,du\,dv + g\,(dv)^2$$

Siendo

$L = e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu}$; $M = f = \vec{N}\,\vec{x}_{uv}$; $N = g = \vec{N} \circ \vec{x}_{vv}$

En nuestro caso

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = \frac{(4uv+1,\ 2u-1,\ -2v-1)}{\sqrt{(4uv+1)^2+(2u-1)^2+(-2v-1)^2}}$$

$\vec{x}_{uu} = (0,0,2)$; $\vec{x}_{uv} = (0,0,0)$; $\vec{x}_{vv} = (0,-2,0)$

$$L = e = \vec{N}\cdot\vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{*}}(4uv+1,\ 2u-1,\ -2v-1)\cdot(0,0,2) = \frac{1}{\sqrt{*}}2(1+2v)$$

$$M = f = \vec{N}\cdot\vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(4uv+1,\ 2u-1,\ -2v-1)\cdot(0,0,0) = 0$$

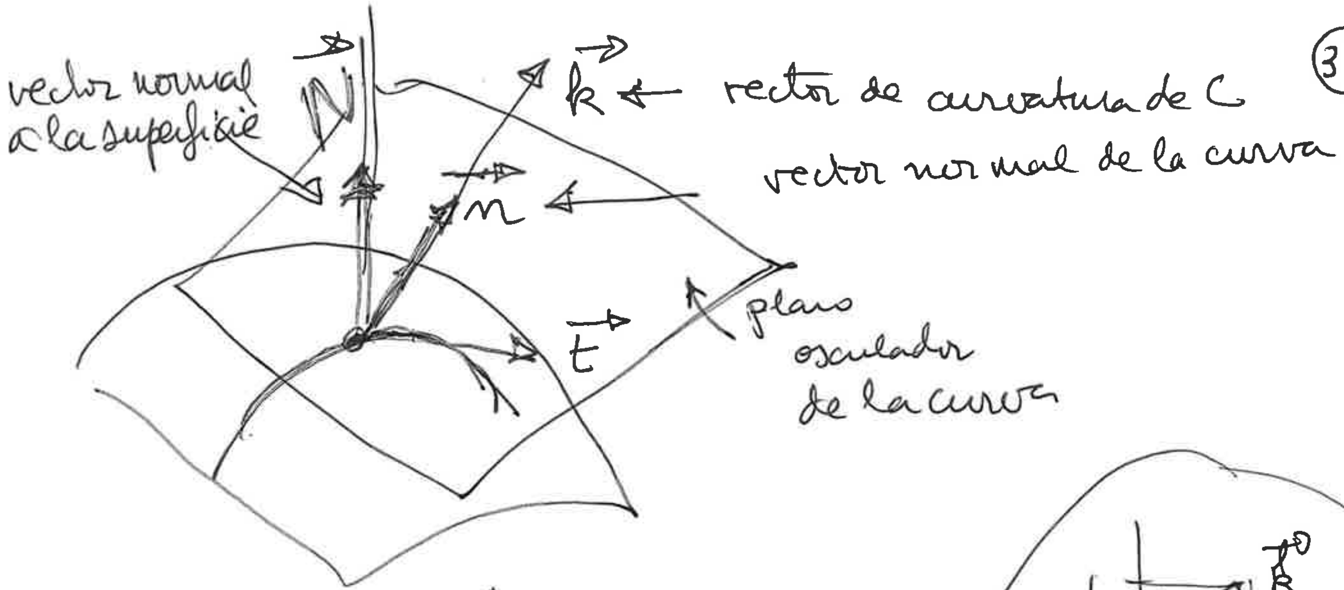
$$N = g = \vec{N}\cdot\vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(4uv+1,\ 2u-1,\ -2v-1)\cdot(0,-2,0) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{*}}(1-2u)$$

d) La curva se obtiene cuando $u=t,\ v=0$

$$\alpha(t) = \vec{x}(t,0) = (t+0,\ t-0^2,\ t^2-0) = (t,t,t^2)$$

para el valor $t=0 \Longrightarrow \alpha(0) = \vec{x}(0,0) = (0,0,0)$

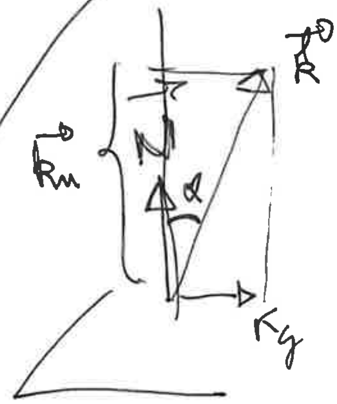


$$\vec{k} = \underbrace{\vec{k}_n}_{} + \underbrace{\vec{k}_g}_{}$$

vector de curvatura

curvatura normal en la dirección de $\vec{N}$

curvatura geodesica en el plano tangente



$\|\vec{k}_n\| = \|\vec{k}\| \cos\alpha$

$= \|k\| \, \|\vec{N}\| \cos\alpha$

$= \vec{k} \cdot \vec{N}$

$\|\vec{N}\| = 1$

Teniendo en cuenta que

$$\boxed{k_n = \|\vec{k}_n\| = \vec{k} \cdot \vec{N}}$$ curvatura normal

Empezamos por calcular el vector de curvatura $\vec{k}$

$$\vec{k} = k(t) \cdot \vec{n}$$

$$\left\{ k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} \right.$$

$\alpha(t) = (t, t, t^2) \rightarrow \alpha(0) = (0,0,0)$

$\alpha'(t) = (1 \;\; 1 \;\; 2t) \rightarrow \alpha'(0) = (1,1,0)$

$\alpha''(t) = (0,0,2) \rightarrow \alpha''(0) = (0,0,2)$

Recordemos que el vector normal de una curva, $\vec{n}_T$, es el vector unitario que tiene la dirección de

$$[\alpha'(t) \times \alpha''(t)] \times \alpha'(t)$$

En nuestro caso

$$[\alpha'(0) \times \alpha''(0)] \times \alpha'(0) = [(1,1,0) \times (0,0,2)] \times (1,1,0)$$

$$= (2,-2,0) \times (1,1,0) = (0,0,4)$$

El vector unitario en esta dirección es

$$\vec{n} = (0,0,1)$$

Por otro lado

$$k(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{\|(2,-2,0)\|}{\|(1,1,0)\|} = 1$$

El vector de curvatura es

$$\vec{k} = k(0)\,\vec{n}(0) = 1 \cdot (0,0,1) = (0,0,1)$$

El vector normal a la superficie cuando $(u=0, v=0)$ es $\vec{N}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$

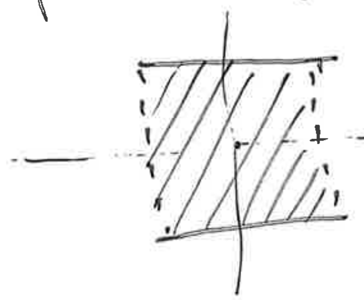
$$k_n(0) = \vec{k}(0) \cdot \vec{N}(0) = (0,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,-1)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Septiembre 2019

1 Escriba un ejemplo de $\mathbb{R}^2$ que no sea ni abierto ni cerrado con la métrica euclidea

Un posible ejemplo sería



$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $|x| < 1, |y| \leq 1\}$

Abierto $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{int}(A)$

Cerrado $\Leftrightarrow$ $A = \mathrm{cl}(A)$

$\mathrm{cl}(A) = \mathrm{int}(A) \cup \mathrm{fr}(A)$

2 Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(x \ln(y^2+e),\ \cos(y) + xy \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right) \right)$$

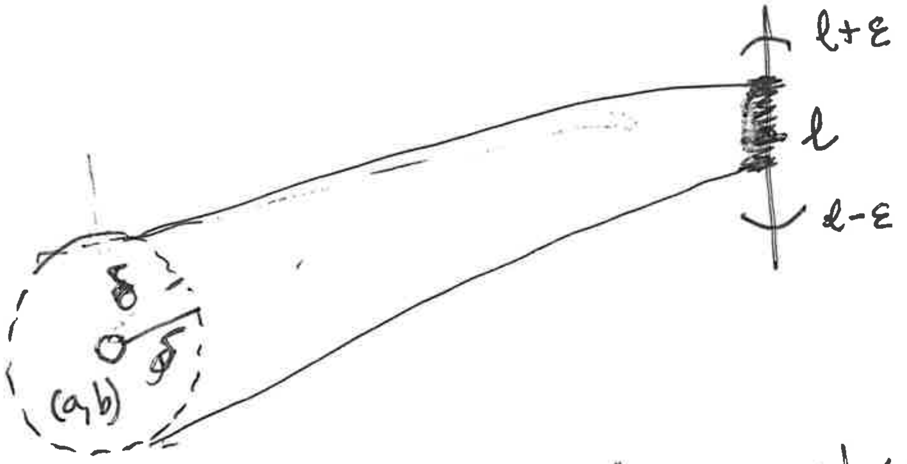
Para las funciones $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} f^1(x,y) \\ f^2(x,y) \end{pmatrix}$ $\Longleftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = (l_1, l_2) \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim_{(x,y)\to(a,b)} f^1(x,y) = l_1 \\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f^2(x,y) = l_2 \end{cases}$$

$\Longleftarrow$

Para calcular el límites hay que calcular los límites de cada componente

Definición de límite ε-δ para funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que $0 < |(x,y)-(a,b)| < \delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x,y) - l| < \varepsilon$$

Calculamos los límites de cada componente

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} x \ln(y^2+e) = 1 \cdot \ln(0+e) = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \underbrace{\cos(y)}_{\substack{\downarrow \\ \cos(0) \\ =1}} + \underbrace{xy}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \underbrace{\sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)}_{\substack{\text{Función} \\ \text{acotada} \\ y \neq 0}} \Rightarrow 1 \cdot 0 = 0$$

por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(x \ln(y^2+e), \cos(y) + xy \sin\left(\frac{\pi x}{y}\right)\right) = (1,0)$$

3) Sea $f(x,y) = \left((y-x)^4 \cos x \, , y e^x \right)$. Determine su. matriz jacobiana

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (y-x)^4 \cos x \\ y e^x \end{pmatrix}$$

La matriz jacobiana es la matriz de la aplicación lineal que "mejor aproxima" a f

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$$

Con notación antigua

$$\begin{pmatrix} D_{11} = \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & D_{12} = \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ D_{21} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & D_{22} = \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Desarrollo de Taylor

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} -4(y-x)^3\cos(x) - (y-x)^4\sin(x) & 4(y-x)^3\cos(x) \\ y\,e^x & e^x \end{pmatrix}$$

(4) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida como

$$f(x,y) = (x-y^2,\ x^2-y^2)$$

¿Tiene inversa local diferenciable en un entorno de $(0,1)$?

Comprobamos si f cumple en $(0,1)$ las condiciones del teorema de función inversa

Teorema de la función inversa

Sea $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable en $\vec{a}$. Si $Df(\vec{a})$ es invertible (es decir $\det(Df(\vec{a})) \neq 0$) entonces f tiene inversa local diferenciable en un entorno de $\vec{a}$.

Además $Df^{-1}(f(a)) = [Df(a)]^{-1}$

Calculamos el jacobiano de f en

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix}$$

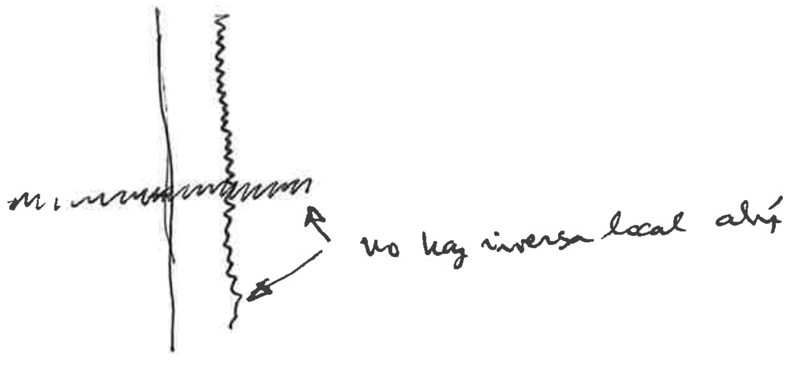
$$\det\left[Df(x,y)\right] = -2y - (-2y)2x = 2y(2x-1)$$

Particularizando para $(x,y) = (0,1)$

$$\det\left[Df(0,1)\right] = -2 \neq 0$$

luego en ese punto la función tiene una inversa local

Comentario. La función f tiene una inversa local en los puntos en los que $2y(2x-1) \neq 0$



EJERCICIOS

5 Sea C una curva dada por la ecuación

$$\vec{x}(t) = \left(\frac{1}{t^2+1},\ t^3,\ t-1\right)$$

Se pide determinar:

a) El triedro de Frenet en el punto $\vec{x}(1)$

b) La curvatura y el vector curvatura en el punto $\vec{x}(1)$

c) Las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante en el punto $\vec{x}(1)$

(a) El triedro de Frenet de una curva con una parametrización cualquiera

$\vec{T}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t)$

$\vec{B}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)$

$\vec{N}$ tiene la dirección de $[\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t)$

Necesitamos calcular

$$\vec{x}'(t) = \left(-\frac{2t}{(t^2+1)^2},\ 3t^2,\ 1\right)$$

$$\vec{x}'(1) = \left(-\frac{1}{2},\ 3,\ 1\right)$$

no es necesario reducirlo se sustituye $t=1$

$$\vec{x}''(t) = \left(-\frac{2(t^2+1)^2 - 2t\cdot 2(t^2+1)\cdot 2t}{(t^2+1)^4},\ 6t,\ 0\right)$$

$$x''(1) = \left(-\frac{8-16}{16},\ 6,\ 0\right) = \left(\frac{1}{2},\ 6,\ 0\right)$$

Calculamos los vectores en la dirección de $\vec{T}$, $\vec{B}$ y $\vec{N}$ y los normalizamos para hacerlos unitarios

En el punto de la curva

$$\vec{x}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$\vec{T}$

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{x}'(1)}{\|\vec{x}'(1)\|} = \frac{1}{\sqrt{(-\frac{1}{2})^2+3^2+1^2}}\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+9+1}}\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{1+36+4}}\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{41}}\left(-\frac{1}{2}, 3, 1\right) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{41}}(-1, 6, 2) = \vec{T}}$$

$\vec{B}$

$\vec{B}$ tiene la dirección de $\vec{x}'(1) \times \vec{x}''(1)$

USAR WOLFRAM ALPHA

$$\vec{x}'(1) \times \vec{x}''(1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{1}{2} & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & 6 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right).$$

Normalizando

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{36+\frac{1}{4}+\frac{81}{4}}}\left(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{226}{4}}}\left(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{226}}\left(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{113}}\left(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{1}{\sqrt{226}}(-12, 1, -9)} = \vec{B}$$

Podemos comprobar que $\vec{B}$ y $\vec{T}$ son ortogonales para asegurar los cálculos

$\vec{T}\times\vec{N}=\vec{B}$
$\vec{N}\times\vec{B}=\vec{T}$
$\vec{B}\times\vec{T}=\vec{N}$

$$\vec{T}\cdot\vec{B}=\underbrace{\frac{1}{\sqrt{41}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{113}}}_{\parallel}(-1,6,2)\cdot(-12,1,-9)=0$$

teniendo en cuenta que $\vec{B}\times\vec{T}=\vec{N}$

$$\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{226}}(-12,1,-9)\times\frac{1}{\sqrt{41}}(-1,6,2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{226}\sqrt{41}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ -12 & 1 & -9 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{\sqrt{9266}}(56,33,-71)=\vec{N}}$$

comprobamos que

$\vec{N}\cdot\vec{T}=0$

$(56,33,-71)\cdot(-1,6,2)=0$

$\vec{N}\cdot\vec{B}=0$

$(-1,6,2)\cdot(56,33,-71)=0$

(b) Tenemos que tener en cuenta la expresión de la curvatura ~~de~~ una curva parametrizada

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|}{\|\vec{x}'(t)\|^3}$$

En nuestro caso, en el punto $\vec{x}(1)$

$$\kappa(1) = \frac{\|\vec{x}'(1) \times \vec{x}''(1)\|}{\|\vec{x}'(1)\|^3}$$

$$\kappa(1) = \frac{\|(-\frac{1}{2}, 3, 1) \times (\frac{1}{2}, 6, 0)\|}{\|(-\frac{1}{2}, 3, 1)\|^3} =$$

$$= \frac{\|(-6, \frac{1}{2}, -\frac{9}{2})\|}{\|(-\frac{1}{2}, 3, 1)\|^3} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{226}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{41}\right)^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{226}}{\frac{1}{8}41\sqrt{41}} = \frac{4\sqrt{226}}{41\sqrt{41}} \simeq 0,2290512877$$

El vector de curvatura $\vec{k}(t)$ tiene la dirección y sentido que el vector normal $\vec{N}$ y tiene por módulo la curvatura. Es decir

$$\vec{k}(t) = \kappa(t)\,\vec{N}(t)$$

$$\vec{k}(1) = \frac{4\sqrt{226}}{41\sqrt{41}} \cdot \frac{1}{\sqrt{9266}} (56, 33, -71)$$

(c) Recordamos que

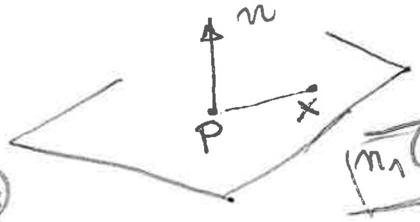
- Plano <u>osculador</u> es perpendicular a $\vec{B}$
- Plano <u>normal</u> es perpendicular a $\vec{T}$
- Plano <u>rectificante</u> es perpendicular a $\vec{N}$

- Ecuación de un plano

$P = (p_1, p_2, p_3)$

$X = (x, y, z)$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$



$$\vec{PX} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(X - P) \cdot \vec{n} = 0$$

$$\boxed{n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0}$$

En nuestro caso $P = \vec{x}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right) \ldots$

- Un vector ortogonal del <u>plano osculador</u> ~~es~~ es un vector en la dirección de $\vec{B}$

$$\vec{B} \approx (-12, 1, -9)$$

Así pues, una ecuación del plano osculador es

$$-12\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1(y - 1) + (-9)(z - 0) = 0$$

$$-12\left(x - \frac{1}{2}\right) + (y - 1) - 9(z - 0) = 0$$

$$\boxed{-12x + y - 9z + 5 = 0}$$

- El plano normal tiene ~~como~~ vector ortogonal un vector en la dirección de $\vec{T}$

$$\vec{T} \approx (-1,6,2)$$

Así pues la ecuación del plano normal es

$$-1\left(x-\frac{1}{2}\right)+6(y-1)+2(z-0)=0$$

$$-x+6y+2z-\frac{11}{2}=0$$

$$\boxed{2x-12y-4z+11=0}$$

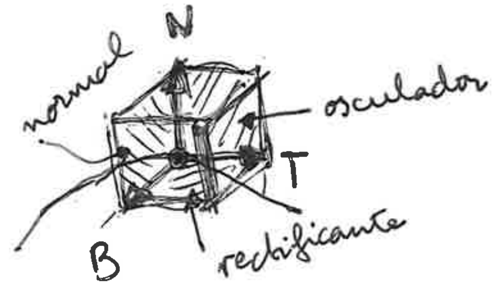
- El plano rectificante tiene como vector ortogonal un vector en la dirección de $\vec{N}$

$$\vec{N} \approx (56, 33, -71)$$

$$56\left(x-\frac{1}{2}\right)+33(y-1)+(-71)(z-0)=0$$

$$\boxed{56x+33y-71z-61=0}$$

Triedro de Frenet



6 Sea S la superficie dada por

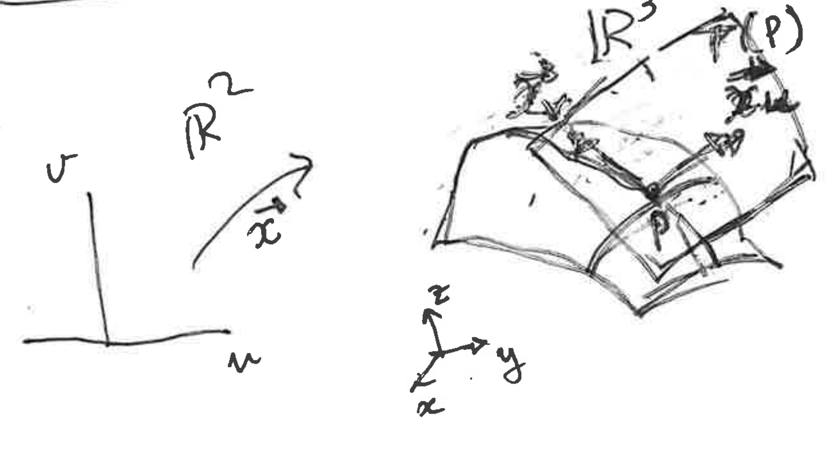
$$\vec{x}(u,v) = \left(u\cos v,\ \sin(v),\ uv\right)$$

a) (1 punto) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental de la superficie en el punto $\vec{x}(1,0)$.

b) (1 punto) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental de la superficie en el punto $\vec{x}(1,0)$

c) (1 punto) Sea $\mathcal{C}$ la curva de la superficie S determinada si consideramos $(u(t),\ v(t)) = (t^2+1,\ \pi t)$ para $t \in [-1,1]$. Determine el vector tangente a esta curva a partir de $\vec{x}_u$ y $\vec{x}_v$. No se considerará respuesta válida si se obtiene sin considerar estos vectores

(a)



$\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ es una base del plano tangente en el punto P de la superficie

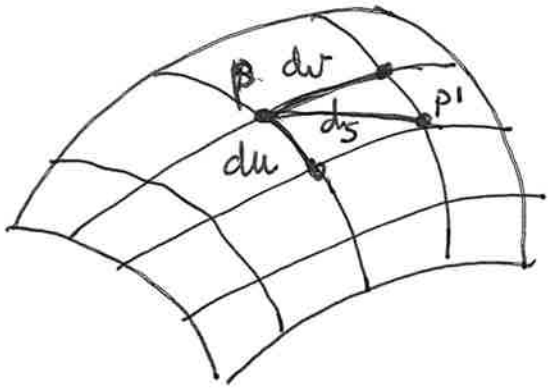
$$\vec{x}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \; ; \quad \vec{x}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial z}\right)$$

$$\vec{x}_u = (\cos v, \, 0, \, v) \; ; \quad \vec{x}_v = (-u\sin(v), \cos(v), \, u)$$

En el punto $\vec{x}(1,0) = (1, \, 0, \, 0)$

$$\vec{x}_u(1,0) = (1,0,0) \; ; \quad \vec{x}_v(1,0) = (0, 1, \, 1)$$

Recordatorio del significado intuitivo de I forma



(du, dv) son las coordenadas locales de P.

≈ Es un vector del plano tangente en P

$$\vec{PP'} = d\vec{x} = \vec{x}_u \, du + \vec{x}_v \, dv$$

$$(ds)^2 = \|d\vec{x}\|^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x} =$$

$$= (\vec{x}_u \, du + \vec{x}_v \, dv) \cdot (\vec{x}_u \, du + \vec{x}_v \, dv) =$$

$$= \underbrace{(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)}_{E} du^2 + 2 \underbrace{(\vec{x}_u \cdot \vec{x}_v)}_{F} du\,dv + \underbrace{(\vec{x}_v \cdot \vec{x}_v)}_{G} dv^2$$

$$= (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$ (forma cuadrática)

En nuestro caso

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (\cos(v), 0, v) \cdot (\cos(v), 0, v) = v^2 + \cos^2(v)$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (\cos(v), 0, v) \cdot (-u\sin(v), \cos(v), u) =$$

$$= uv - u\cos(v)\sin(v)$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (-u\sin(v), \cos(v), u) \cdot (-u\sin(v), \cos(v), u) =$$

$$= u^2 + \cos^2(v) + u^2\sin^2(v)$$

para es caso particular del punto

$u = 1, v = 0,$

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 1^2 = 1$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = 0$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0,1,1) \cdot (0,1,1) = 1^2 + 1^2 = 2$$

(b) Tenemos que calcular los coeficientes de la 2ª forma fundamental

$$\mathrm{II}(du, dv) = (du, dv) \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= e(du)^2 + 2f\,du\,dv + g\,(dv)^2$$

[La segunda forma fundamental mide la separación de los puntos de la superficie al plano tangente

$\vec{N} = \dfrac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$. es el vector ortogonal al plano tangente unitario]

$d \approx \frac{1}{2}\mathrm{II}(du, dv)$

En nuestro caso particular

$$\vec{x}_u(1,0) \times \vec{x}_v(1,0) = (1,0,0) \times (0,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (0,-1,1)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1)$$

los coeficientes de la II forma fundamental

$$e = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} \quad ; \quad f = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} \quad ; \quad g = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N}$$

En nuestro caso

$$\vec{x}_{uu} = (0,0,0) \quad ; \quad \vec{x}_{uv} = (-\sin(v),0,1) \; ;$$

$$\vec{x}_{vv} = (-u\cos(v), -\sin(v), 0)$$

particularizando $u=1$, $v=0$

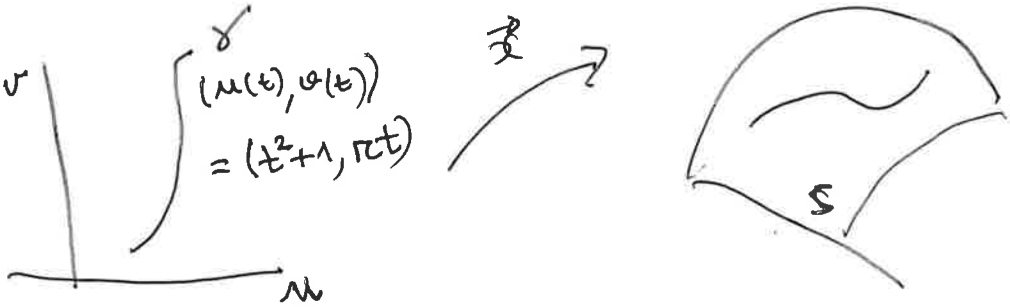
$$\vec{x}_{uu}(1,0) = (0,0,0) \; ; \; \vec{x}_{uv}(1,0) = (0,0,1) \; ; \; \vec{x}_{vv}(1,0) = (-1,0,0)$$

Los coeficientes en nuestro caso particular de la II forma fundamental

$$e = \vec{x}_{uu} \cdot \vec{N} = (0,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$

$$f = \vec{x}_{uv} \cdot \vec{N} = (0,0,1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g = \vec{x}_{vv} \cdot \vec{N} = (-1,0,0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(0,-1,1) = 0$$



Consideramos la curva

$$\big(u(t), v(t)\big) = (t^2+1, \pi t) \quad \text{para } t \in [-1, 1]$$

la curva es

$$\vec{x}(t) = \vec{x}\big(u(t), v(t)\big) =$$

$$= \big(u(t)\cos(v(t)), \sin(v(t)), u(t)\cdot v(t)\big) =$$

$$= \big((t^2+1)\cos(\pi t), \sin(\pi t), (t^2+1)\pi t\big)$$

es una curva que está contenida en la superficie S

La derivada, según la regla de la cadena

$$\vec{x}'(t) = \vec{x}_u\big(u(t), v(t)\big)\, u'(t) + \vec{x}_v\big(u(t), v(t)\big)\, v'(t)$$

En nuestro caso $u'(t) = 2t$; $v'(t) = \pi$

$$\boxed{x'(t) = 2t(\cos v, 0, v) + \pi(-u \sin v, \cos v, u)}$$