Complementos de matemáticas

Exámenes
2018

allave@madrid.uned.es

Complementos de matemáticas

$\boxed{\text{Junio 2018}}$

modelo A

PREGUNTAS CORTAS

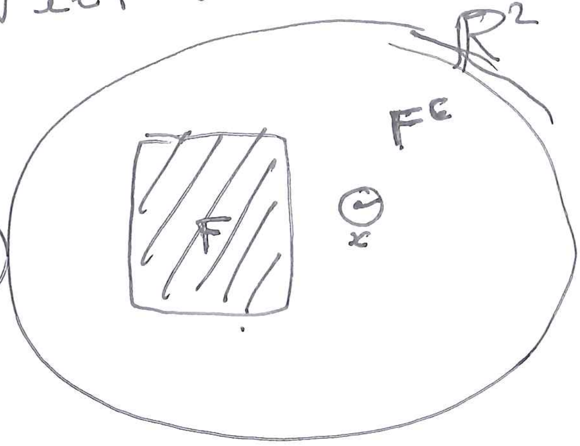
1) Escriba un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ de un conjunto cerrado no compacto, y de un conjunto acotado y no compacto

Recordamos que en $\mathbb{R}^2$

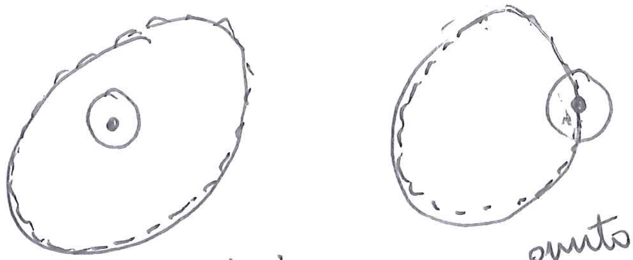
cerrado y acotado $\Leftrightarrow$ compacto

Definición de conjunto cerrado:

Def 1: $F \in \mathbb{R}$ se dice que es un conjunto cerrado sii su complementario, F^c, es un conjunto abierto. Es decir, $\forall x \in F'$ se verifica que existe $B_\varepsilon(x) \subset F$

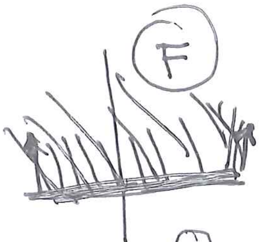


Def 2: $F = \text{interior}(F) \cup \text{Frontera}(F)$



Ejemplo 1: cerrados no acotados

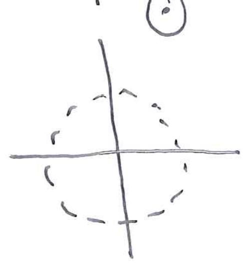
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y \geq 0\}$



Ejemplo 2 acotado no compacto

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x^2+y^2<1\}$

(acotado, no cerrado)



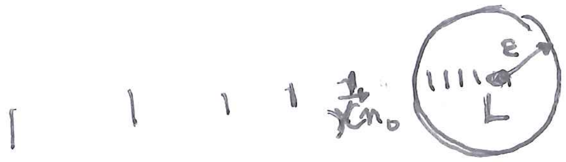
(2) Determine el límite cuando n tiende a infinito de la sucesión dada por

$$\vec{x}_n = \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n}, \quad \frac{n-1}{n^2-n}\right)$$

Se trata de una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^2$

La definición general de límite de una sucesión en un espacio métrico

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{L} \iff \forall \varepsilon>0 \; \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tal que } \forall n\geq n_0 \text{ se verifica que } \|\vec{x}_n-\vec{L}\|<\varepsilon$$



teorema

Si $\vec{x}_n=(x_n^1, x_n^2)$ y $\vec{L}=(l^1, l^2)$

$$\lim_{n\to\infty} \vec{x}_n = \vec{L} \iff \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n^1 = l^1 \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n^2 = l^2 \end{cases}$$

Así pues, tenemos que calcular los límites de las dos componentes

- $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2n} = 1^{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{2n}{n^2}}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2n}{n^2}\right]} = e^0 = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n^2-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

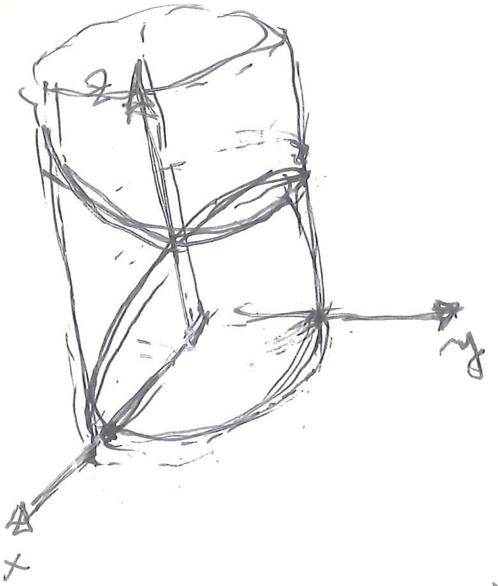
Por consiguiente

$$\lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right), \frac{n-1}{n^2-n} \right) = (1,0)$$

③ Calcule la longitud de la porción de hélice para $t \in [0, 2\pi]$, dada por las ecuaciones

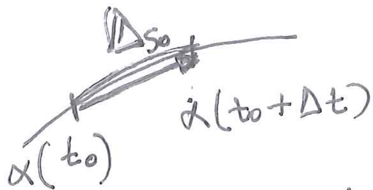
$$\vec{\alpha}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$$

$\alpha : [0, 2\pi] \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
curva



La longitud de arco es

$$\sum \Delta s \to \int ds$$



$$\Delta s = \| \Delta \vec{\alpha} \|$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \left\| \frac{\Delta \vec{\alpha}}{\Delta t} \right\|$$

pasando al límite

$$\frac{ds}{dt} = \| \alpha'(t) \|$$

$$ds = \| \vec{\alpha}'(t) \| dt$$

$$\vec{\alpha}'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 1)$$

$$\| \alpha'(t) \| = \sqrt{\sin^2(t) + \cos^2(t) + 1} =$$
$$= \sqrt{2}$$

$$l = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} \| \alpha'(t) \| \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \, dt = \sqrt{2}\, t \Big]_0^{2\pi} = 2\sqrt{2}\,\pi$$

4 Sea la curva dada por la ecuación

$$\vec{\alpha}(t) = (e^t, t^2+t, t+1), \quad t \in \mathbb{R}$$

Determínese el vector normal a la curva en el punto $\vec{\alpha}(0)$.

Si una curva tiene una parametrización cualquiera, el vector normal es el vector unitario en la dirección del vector

$$(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'') \times \vec{\alpha}'$$

En nuestro caso

$$\vec{\alpha}'(t) = (e^t, 2t+1, 1) \rightarrow \alpha'(0) = (1, 1, 1)$$

$$\alpha''(t) = (e^t, 2, 0) \rightarrow \alpha''(0) = (1, 2, 0)$$

Calculamos los productos vectoriales que se indican

$$\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1)$$

$$[\vec{\alpha}'(0) \times \vec{\alpha}''(0)] \times \vec{\alpha}'(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (0, 3, -3)$$

$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Normalizando este vector,

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+(-3)^2}}(0, 3, -3) = \frac{1}{\sqrt{18}}(0, 3, -3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

EJERCICIOS

5) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$

b) Calcule, si existen, las derivadas parciales de f en $(0,0)$ e indique si f es diferenciable en $(0,0)$

c) Determine los puntos críticos de f en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ y estudie si son extremos relativos en f. ¿Es el punto $(0,0)$ un extremo relativo de f?

a) la función f es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ porque es cociente de funciones continuas y no se anula el denominador.

Para estudiar la continuidad en $(0,0)$ hay que comprobar si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{0}} f(\vec{x}) = f(\vec{0}) \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \to \vec{0}} \| f(\vec{x}) - f(\vec{0}) \| = 0$$

En nuestro caso

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = 0$$

Escribiendo esta expresión en polares $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\left| \frac{\rho^2 \cos^2\theta}{\rho} - 0 \right| = \rho |\cos^2\theta| \leq \rho \xrightarrow[\rho \to 0]{} 0$$

tomando un entorno suficientemente pequeño $|f(x,y)-0|$ se puede hacer tan pequeño como queramos

Por tanto f es continua en $(x,y)=(0,0)$

b) Usamos la definición de derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{\sqrt{h^2}}-0}{h}=$$

$\sqrt{h^2}=|h|$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}.$$

Este límite no existe ya que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{|h|}=1\ ;\ \lim_{h\to 0^-}\frac{h}{|h|}=-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$\Rightarrow$ f no es diferenciable ya que si fuese diferenciable existirían las derivadas parciales y $df=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

(aplicación lineal $df(h,k)=\frac{\partial f}{\partial x}h+\frac{\partial f}{\partial y}k$)

c) la función f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ por ser cociente de funciones diferenciables y no anularse el denominador, luego los puntos críticos son aquellos en los que se anulan las derivadas parciales de $f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x\sqrt{x^2+y^2} - x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot \sqrt{x^2+y^2} \cdot 2\sqrt{x^2+y^2} - 2x^3}{2\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{4x(x^2+y^2) - 2x^3}{2\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} = \frac{2x^3 - 4xy^2}{2\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{x^3 - 2xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{0 \cdot \sqrt{x^2+y^2} - x^2 \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{-x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)}$$

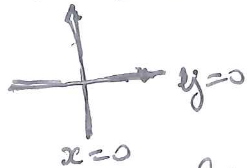
Los puntos críticos $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ verifican

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 2xy^2 = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x^2 - 2y^2) = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases}$$

La segunda ecuación se satisface si

$x^2=0$ o bien $y=0$. Es decir en

en conjunto



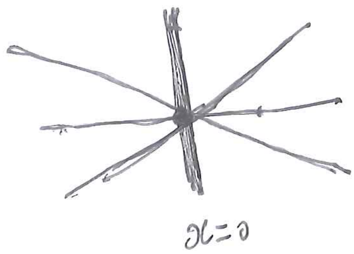
La primera ecuación se verifica cuando

$x=0$ o bien $x^2-2y^2=(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)=0$

Es decir

$x=0$ o bien $(x+\sqrt{2}y)=0$ o bien $(x-\sqrt{2}y)=0$

Es decir, el conjunto



Las dos ecuaciones se verifican simultáneamente cuando $x=0$ (el eje y)

Luego son puntos críticos todos los puntos del eje y, salvo $(0,0)$. Es decir, todos los puntos $\{(0,a)\}_{a\neq 0}$

El conjunto de puntos críticos es

$$C=\{(0,a)\in\mathbb{R}^2 \text{ tal que } a\in\mathbb{R}-\{0\}\}$$

Para ver la naturaleza de estos puntos críticos no es necesario pasar a estudiar el Hessiano

$$f(x,y) \approx f(0,0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \; \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$+ (x,y)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \cdots$$

Para los puntos críticos

$$f(0,a) = \frac{0^2}{\sqrt{0^2+a^2}} = 0$$

y para cualquier punto $\neq (0,0)$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \geq 0$$

por tanto, los puntos críticos son puntos mínimos relativos y mínimos globales en el dominio de definición de f.

6) Sea S la superficie parametrizada, para $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ por

$$\vec{x}(u,v) = (u,\ u^2+v^2,\ u^2-v)$$

a) Estudie si es una parametrización regular

b) Determine los coeficientes de la primera forma fundamental

c) Determine los coeficientes de la segunda forma fundamental

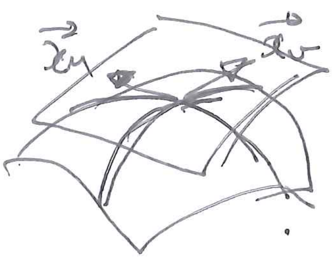
d) Sea la curva C incluida en S, definida por

$$\alpha(t) = (0, t^2, t)$$

para $t \in \mathbb{R}$. Calcule la curvatura normal en $\alpha(0)$

a) Para que la parametrización sea regular tiene existir una base $\{\vec{x}_u, \vec{x}_v\}$ del plano tangente. Es decir

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v \neq \vec{0}$$



$\vec{x}_u = (1, 2u, 2u)$; $\vec{x}_v = (0, 2v, -1)$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2u & 2u \\ 0 & 2v & -1 \end{vmatrix} = (-2u-4uv,\ 1,\ 2v) \neq (0,0,0)$$

nunca se anula

$$= (-2u(1+2v),\ 1,\ 2v)$$

b) Para calcular los coeficientes de la 1ª Forma fundamental hacemos

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1, 2u, 2u)\cdot(1, 2u, 2u) = 1 + 8u^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v \; (1, 2u, 2u)\cdot(0, 2v, -1) = 2u(2v-1)$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0, 2v, -1)\cdot(0, 2v, -1) = 4v^2 + 1$$

1ª Forma fundamental

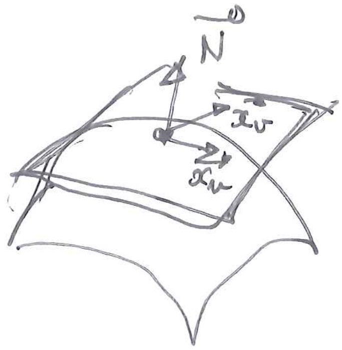
$$\mathrm{I}(du, dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} =$$

$$= E(du)^2 + 2F\,du\,dv + G(dv)^2$$

define un producto escalar en el plano tangente

c) Para calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental necesitamos calcular el vector unitario normal a la superficie (vector normal de plano tangente)

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|}$$



$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{4u^2(1+2v)^2 + 1 + 4v^2}}\left(-2u(1+2v), 1, 2v\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}}\left(-2u(1+2v), 1, 2v\right)$$

Necesitamos también calcular

$\vec{x}_{uu} = (0,2,2)$; $\vec{x}_{uv} = (0,0,0)$; $\vec{x}_{vv} = (0,2,0)$

Los coeficientes de la 2ª Forma fundamental son

$$e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-2u(1+2v), 1, 2v) \cdot (0,2,2) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}} \cdot [0 + 2 + 4v] = \frac{2}{\sqrt{*}}(1+2v)$$

$$f = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-2u(1+2v), 1, 2v) \cdot (0,0,0) = 0$$

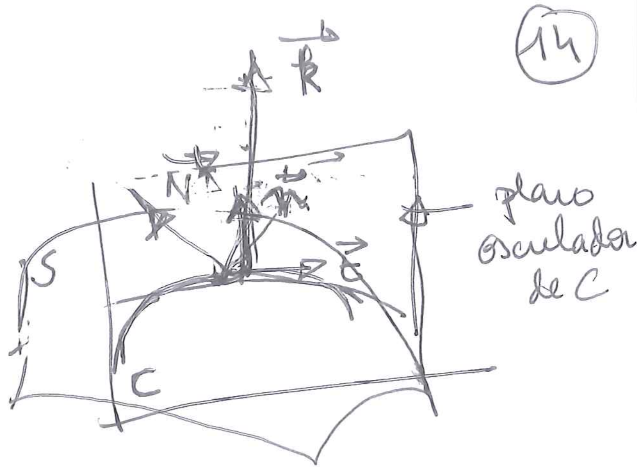
$$g = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{*}}(-2u(1+2v), 1, 2v)(0,2,0) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{*}}(0 + 2 + 0) = \frac{2}{\sqrt{*}}$$

2ª Forma fundamental

$$II(du, dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

d) La curvatura normal



En una curva,
el vector de curvatura
es un vector $\vec{k}$, en
la dirección del vector
normal a la curva

$$\vec{k} = k\,\vec{n}$$ (vector de curvatura)

vector normal a la curva

curvatura

vector de curvatura

En donde

$$k(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$ (curvatura)

La curva $\alpha(t) = (0, t^2, t)$
En efecto está en la superficie S

$$\vec{x}(u,v) = (u,\ u^2+v^2,\ u^2-v)$$

Haciendo $u=0,\ v=-t$. $\Rightarrow \alpha(t) = \vec{x}(0,-t) = (0,t^2,t)$

Para $t=0 \Rightarrow \alpha(0) = (0,0,0)$

Teniendo en cuenta que

$\vec{\alpha}'(t) = (0,2t,1) \Rightarrow \vec{\alpha}'(0) = (0,0,1)$

$\vec{\alpha}''(t) = (0,2,0) \Rightarrow \vec{\alpha}''(0) = (0,2,0)$

Resulta que el

El vector normal de curva es el vector unitario que lleva la dirección de

$$\left[\alpha'(0) \times \alpha''(0)\right] \times \vec{\alpha}'(0) =$$

$$= \left[(0,0,1) \times (0,2,0)\right] \times (0,0,1) =$$

$$= (-2,0,0) \times (0,0,1) = (0,2,0)$$

Normalizando, el vector normal de la curva es

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{0^2+2^2+0^2}}(0,2,0) = (0,1,0)$$

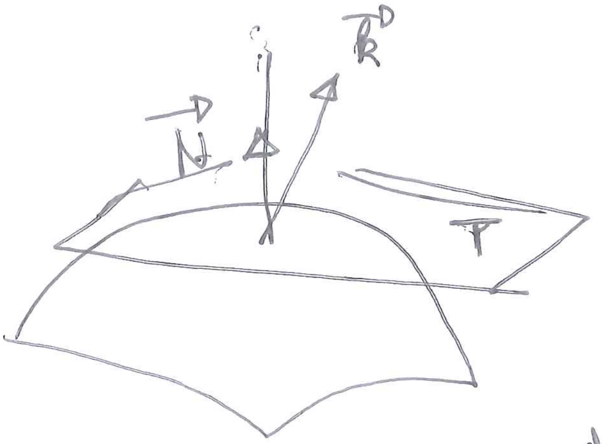
La curvatura en $\vec{\alpha}(0)$ es

$$\kappa(0) = \frac{\|\alpha'(0) \times \alpha''(0)\|}{\|\alpha'(0)\|^3} = \frac{\|(0,0,1)\times(0,2,0)\|}{\|(0,0,1)\|^3} =$$

$$= \frac{\|(-2,0,0)\|}{1^3} = 2$$

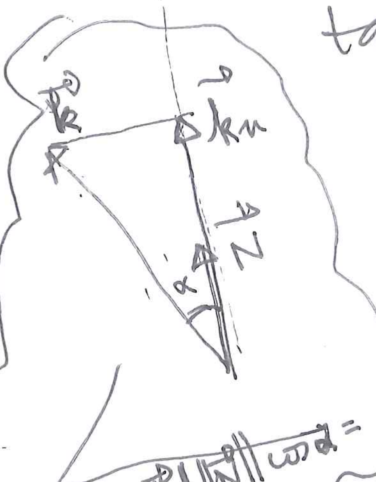
Por consiguiente el vector de curvatura de $\alpha(0)$ es

$$\vec{k} = 2(0,1,0) = (0,2,0)$$



Si descomponemos el vector de curvatura en dos vectores: uno en la dirección del vector $\vec{N}$ (normal a la superficie) y otro ortogonal a este en el plano tangente

$$\vec{k} = \underbrace{\vec{K_n}}_{\substack{\text{vector}\\ \text{curvatura}\\ \text{normal}\\ \text{(en la dirección}\\ \text{de } \vec{N})}} + \underbrace{\vec{K_g}}_{\substack{\text{vector}\\ \text{curvatura}\\ \text{geodesica}\\ \text{(en el plano}\\ \text{tangente)}}}$$



$\vec{k}\cdot\vec{N} = \|\vec{k}\|\,\|\vec{N}\|\cos\alpha = \|\vec{k_n}\|$

La curvatura normal

$$K_n = \|\vec{K_n}\| = \vec{k}\cdot\vec{N} = (0,2,0)\cdot(0,1,0) = 2$$

Recordar que si $t=0 \Rightarrow u=0,\ v=0$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{4u^2(1+2v)^2+1+4v^2}}\left(-2u(1+2v),\,1,\,2v\right)$$

$$\vec{N}(0,0) = \frac{1}{\sqrt{1}}(0,1,0) = (0,1,0)$$

Complementos de matemáticas

Junio 2018

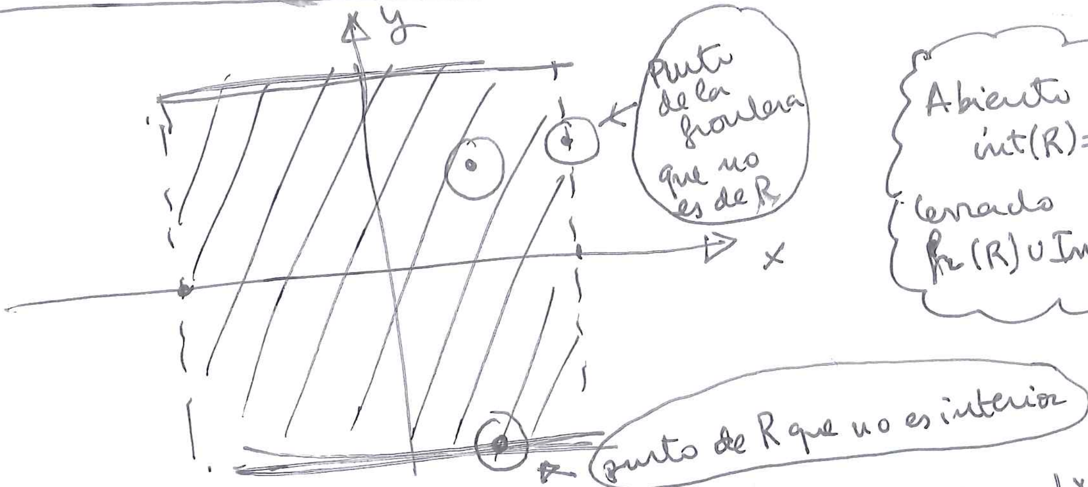
modelo B

PREGUNTAS CORTAS

1) En $\mathbb{R}^2$, determine el interior, frontera y clausura del conjunto

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } |x|<1, |y|\le 1\}$$

Razone si R es conjunto abierto, cerrado, acotado o ~~compacto~~



Abierto $int(R) = R$
cerrado $fr(R) \cup Int(R) = R$

Son puntos interiores $int(R) = \{(x,y) \text{ tal que } |x|<1, |y|<1\}$

puntos frontera $fr(R) = \{(x,y) \text{ tal que } |x|=1, |y|=1\}$

clausura $cl(R) = int(R) \cup fr(R) =$
$= \{(x,y) \text{ tal que } |x|\le 1, |y| \le 1\}$

R <u>no</u> es abierto (no todos sus puntos son interiores $R \neq int(R)$)

R <u>no</u> es cerrado (hay puntos de la frontera que no son del conjunto $cl(R) \neq R$)

R <u>no</u> es compacto (cerrado y acotado)
R sí es acotado

2) Calcule, si existe, el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(xy\cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right), \frac{x^2-1}{x-1} \right)$$

Estudiamos si existen los límites de cada una de sus componentes

■ $\lim_{(x,y)\to(1,0)} xy\cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right)$

Conjeturamos que el límite vale 0 y comprobaremos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left| xy\cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right) - 0 \right| = 0$$

En efecto, para $(x,y) \in B_\varepsilon(1,0) - \{(1,0)\}$

$$\left| xy\cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right) \right| = |xy| \underbrace{\left| \cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right) \right|}_{\substack{\text{El denominador}\\ \text{no se anula}\\ \text{en las proximidades}\\ \text{de }(1,0)\text{, salvo}\\ \text{en }(1,0)}} < \underbrace{|x||y|}_{\to 0} \cdot 1 \pm 0$$

■ $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x+1) = 2$

Por tanto $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left(xy\cos\left(\frac{\pi}{x^4y}\right), \frac{x^2-1}{x-1} \right) = (0, 2)$

(3) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida

$$f(x,y) = (e^x, \ x + y^2)$$

Estudie si f es un cambio de variable en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } y > 0\}$$

Definición de cambio de variable

$f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es un cambio de variable (A abierto)

1. $f \in \mathcal{C}^q(A) \quad q \geq 1$
2. $\det f'(\vec{x}) \neq 0 \quad \forall \vec{x} \in A$
3. f es inyectiva en A

Por ejemplo el cambio de coordenadas polares $A = (0,\infty) \times (0, 2\pi)$

$$f(r,\theta) = (r\cos\theta, \ r\sin\theta) \to \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$f' = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$\det(f') = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

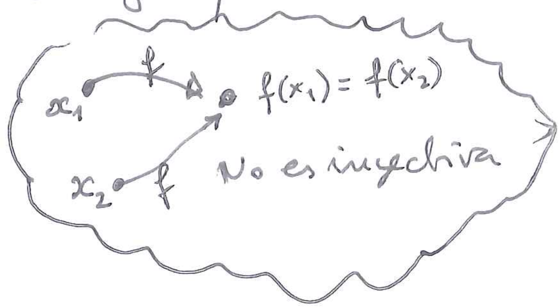
f es inyectiva en $A = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } \rho > 0, \ 0 < \theta < 2\pi\}$

1. La función f es derivable infinitas veces
2. $\det f' = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ 1 & 2y \end{vmatrix} = \underbrace{2e^x}_{\text{no se anula}} \underbrace{y}_{y>0} \neq 0 \quad$ si $(x,y) \in A$

3. Es inyectiva

¿ $f(x_1 y_1) = f(x_2 y_2) \Rightarrow x_1 = x_2,\ y_1 = y_2$?

[Dos elementos tienen la misma imagen necesariamente tienen que ser iguales]



$$\left.\begin{cases} e^{x_1} = e^{x_2} \\ x_1 + y_1^2 = x_2 + y_2^2 \end{cases}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x_1 = x_2 \\ \xRightarrow[x_1 = x_2]{} x_1 + y_1^2 = x_1 + y_2^2 \end{array}$$

$$\Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \xRightarrow[\text{Como } y_1, y_2 > 0]{} y_1 = y_2$$

En definitiva, $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$

Luego f es inyectiva en A.

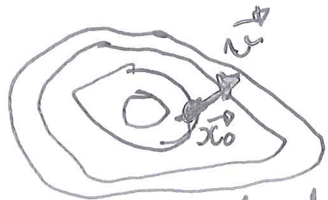
Como se da 1. 2. y 3. f es un cambio de variable

4 Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x\, e^{ay} + \sin(y^2)$$

con $a \in \mathbb{R}$. Determine el valor de a para que $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,0) = 2$

Se trata de estudiar una derivada direccional de un campo escalar



Recordamos la definición de derivada direccional

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\| f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0) \|}{h}$$

($\vec{v}$ vector unitario)

Para calcular la derivada direccional si f es diferenciable

$$D_{\vec{v}} f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{v} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$$

En nuestro caso

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{ay} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = a x e^{ay} + 2y\cos(y^2) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = a$$

Por tanto

$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,0) = \nabla f(1,0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= (1,a) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+a)$$

Si queremos que $D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(1,a) = 2$

tiene que ser

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+a) = 2 \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{2} - 1$$

EJERCICIOS

(5) Sea la curva de ecuaciones

$\vec{x}(t) = (x, y, z)$ donde

$x = t^2 - t$; $y = t^3 + t$; $z = t - 1$, $t \in \mathbb{R}$

a) Determine la curvatura y la torsión en el punto $\vec{x}(0)$

b) Determine el triedro de Frenet en el punto $\vec{x}(0)$

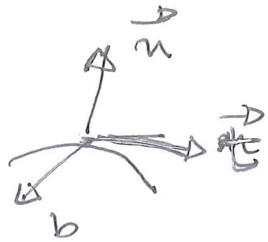
c) Determine las ecuaciones de los planos normal, osculador y rectificante en el punto $\vec{x}(0)$

Recordatorio

$$\begin{cases} \vec{t} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \\ \vec{b} \text{ tiene la dirección de } \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \\ \vec{n} \text{ tiene la dirección de } [\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)] \times \vec{x}'(t) \end{cases}$$

$$\kappa = \frac{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|}{\| \vec{x}'(t) \|^3} \quad \text{(curvatura)}$$

$$\tau = \frac{\det[\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t)]}{\| \vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t) \|^2} \quad \text{(torsión)}$$



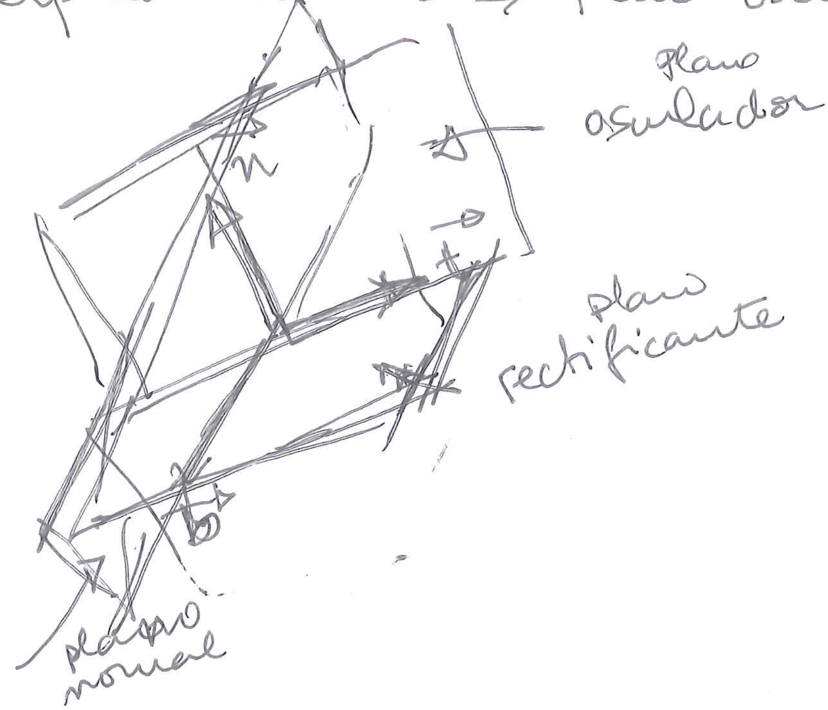
triedro de Frenet

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{t}}{ds} = \kappa \vec{n} \\ \dfrac{d\vec{n}}{ds} = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b} \\ \dfrac{d\vec{b}}{ds} = -\tau \vec{n} \end{cases}$$

Plano perpendicular a $\vec{t}$ $\Rightarrow$ plano Normal $\langle \vec{n}, \vec{b} \rangle$

plano perpendicular a $\vec{n}$ $\Rightarrow$ plano rectificante $\langle \vec{t}, \vec{b} \rangle$

plano perpendicular a $\vec{b}$ $\Rightarrow$ plano osculador $\langle \vec{t}, \vec{n} \rangle$



---

a) Vamos a hacer algunos cálculos que nos va a hacer falta

$$\vec{x}(t) = (t^2 - t, t^3 + t, t-1) \rightarrow \vec{x}(0) = (0, 0, -1)$$

$$\vec{x}'(t) = (2t-1, 3t^2+1, 1) \rightarrow \vec{x}'(0) = (-1, 1, 1)$$

$$\vec{x}''(t) = (2, 6t, 0) \rightarrow \vec{x}''(0) = (2, 0, 0)$$

$$\vec{x}'''(t) = (0, 6, 0) \Rightarrow \vec{x}'''(0) = (0, 6, 0)$$

Curvatura

$$\chi(0) = \frac{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|}{\|\vec{x}'(0)\|^3} = \frac{\|(-1,1,1) \times (2,0,0)\|}{\|(-1,1,1)\|^3} =$$

$$= \frac{\|(0,2,-2)\|}{\|(-1,1,1)\|^3} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Torsión

$$\tau(0) = \frac{\det\left(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)\right)}{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|^2} =$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix}}{\|(0,2,-2)\|^2} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$$

b) Para determinar el triedro de Frenet tenemos que normalizar los vectores que se citan en el recordatorio del principio

$\vec{t}$ hay que normalizar $\vec{x}'(0) = (-1,1,1)$

$$\vec{t} = \frac{\vec{x}'(0)}{\|\vec{x}'(0)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$\vec{n}$ hay que normalizar $\left[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\right] \times \vec{x}'(0) =$

$$= \left[(-1,1,1) \times (2,0,0)\right] \times (-1,1,1) = (0,2,-2) \times (-1,1,1) =$$

$$= (4,2,2)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\|(4,2,2)\|}(4,2,2) = \frac{1}{\sqrt{24}}(4,2,2) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}(4,2,2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1)$$

b) hay que normalizar el vector

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-1,1,1) \times (2,0,0) = (0,2,-2)$$

$$\vec{b} = \frac{1}{\|(0,2,-2)\|}(0,2,-2) = \frac{1}{\sqrt{8}}(0,2,-2) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(0,2,-2) =$$

$$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$$

c) Los planos que se apoyan en $\vec{x}(0) = (0,0,-1)$

* Plano normal, [perpendicular a $(-1,1,1) \approx \vec{t}$]

$$-1(x-0) + 1(y-0) + 1(z+1) = 0$$

$$-x + y + z = 0$$

* Plano rectificante [perpendicular a $(2,1,1) \approx \vec{n}$]

$$2(x-0) + 1(y-0) + 1\cdot(z+1) = 0$$

$$2x + y + z + 1 = 0$$

* Plano osculador [perpendicular a $(0,1,-1) \approx \vec{b}$]

$$0(x-0) + 1(y-0) - 1(z+1) = 0$$

$$y - z - 1 = 0$$

6) Sea S la superficie dada, para $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, por las ecuaciones paramétricas

$$\vec{x}(u,v) = (u, v, u^2-v^2+uv)$$

a) Determine los coeficientes de la 1ª forma fundamental en un punto genérico $\vec{x}(u,v)$ y en $\vec{x}(0,0)$.

b) Determine los coeficientes de la 2ª forma fundamental en un punto genérico $\vec{x}(u,v)$ y en $\vec{x}(0,0)$

c) Clasifique el punto $\vec{x}(0,0)$

a) $\vec{x}_u = (1, 0, 2u+v) \to \vec{x}_u(0,0) = (1,0,0)$

$\vec{x}_v = (0, 1, -2v+u) \to \vec{x}_v(0,0) = (0,1,0)$

Los coeficientes de la 1ª Forma

$$I(du,dv) = (du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = E(du)^2 + \bar{F}du\,dv + G(dv)^2$$

$$E = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_u = (1,0,2u+v)\cdot(1,0,2u+v) =$$
$$= 1 + (2u+v)^2$$

$$F = \vec{x}_u \cdot \vec{x}_v = (1,0,2u+v)(0,1,-2v+u) =$$
$$= (2u+v)(-2v+u)$$

$$G = \vec{x}_v \cdot \vec{x}_v = (0,1,-2v+u)\cdot(0,1,-2v+u) =$$
$$= 1 + (u-2v)^2$$

En particular cuando $u=v=0$
en $x(0,0)=(0,0,0)$ se tiene que

$E=1$; $F=0$; $G=1$

b) Vamos a calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$\mathrm{II}(du,dv) = (du,dv)\begin{pmatrix} e & f \\ f & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv\end{pmatrix}$$

Para ello calculamos

$$\vec{x}_{uu}(u,v) = (0,0,2) \rightarrow \vec{x}_{uu}(0,0) = (0,0,2)$$
$$\vec{x}_{uv}(u,v) = (0,0,-2) \rightarrow \vec{x}_{uv}(0,0) = (0,0,-2)$$
$$\vec{x}_{vv}(u,v) = (0,0,1) \rightarrow \vec{x}_{vv}(0,0) = (0,0,1)$$

Necesitamos determinar, también, $\vec{N}$, el vector normal de la superficie

$$\vec{N} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{\|\vec{x}_u \times \vec{x}_v\|} = $$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u+v \\ 0 & 1 & -2v+u \end{vmatrix} = (-2u-v, 2v-u, 1)$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{(-2u-v)^2+(2v-u)^2+1}}(-2u-v, 2v-u, 1) =$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}(-2u-v,\ 2v-u,\ 1)$$

Los coeficientes de la segunda forma fundamental

$$e = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uu} = \frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}(-2u-v,\ 2v-u,\ 1)\cdot(0,0,2) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}$$

$$f = \vec{N} \cdot \vec{x}_{uv} = \frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}(-2u-v,\ 2v-u,\ 1)\cdot(0,0,1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}$$

$$g = \vec{N} \cdot \vec{x}_{vv} = \frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}(-2u-v,\ 2v-u,\ 1)\cdot(0,0,-2) =$$

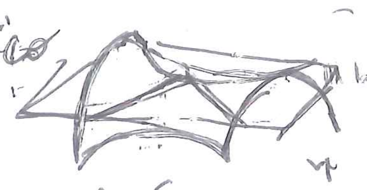
$$= -\frac{2}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}$$

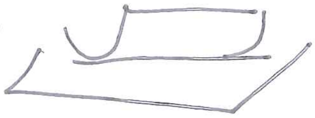
para $\vec{x}(0,0)$

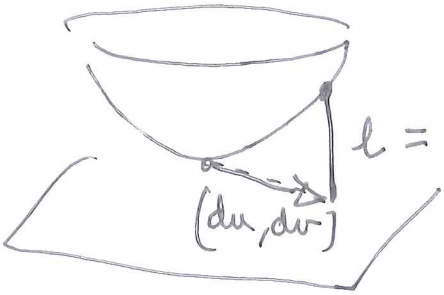
$e=2$; $f=1$; $g=-2$

c) Para clasificar los puntos calculamos

$$eg - f^2 \begin{cases} > 0 & \text{Elíptico} \\ < 0 & \text{Hiperbólico} \\ = 0 & \text{parabólico} \end{cases}$$







$$\ell = \frac{1}{2}\, II_p (du, dv)$$

La segunda forma fundamental mide la distancia al plano tangente según las direcciones $(du, dv) \in T$

En la superficie S en un punto genérico $\vec{x}(u,v)$

$$eg - f^2 = \frac{2}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{5u^2+5v^2+1}}\right)^2$$

$$= -\frac{4}{5u^2+5v^2+1} - \frac{1}{5u^2+5v^2+1} = -\frac{5}{5u^2+5v^2+1} < 0$$

es un punto hiperbólico en todos los puntos de S

Complementos de matemáticas

Septiembre 2018

PREGUNTAS CORTAS

1) Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función inyectiva y sea $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ la aplicación definida por

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)|$$

Pruebe que $\underline{d}$ es una distancia

Hay que comprobar que d cumple los axiomas que deban cumplir las distancias $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$

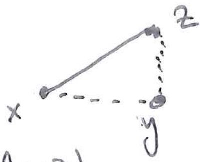
En efecto

$$d(x,y) = 0 \iff |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow f(x) = f(y) \underset{f \text{ inyectiva}}{\iff} x = y$$

2. $d(x,y) = d(y,x)$

En efecto

$$d(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = d(y,x)$$



3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$$d(x,z) = |f(x) - f(z)| = |f(x) - f(y) + f(y) - f(z)| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| = d(x,y) + d(y,z)$$

Por tanto, se cumplen las tres propiedades que se exigen para que $\underline{d}$ sea una distancia

2) Estudie la continuidad de la función $g:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ la función es continua ya que es un cociente de funciones continuas que no se anula el denominador.

Estudiamos la continuidad en $(0,0)$

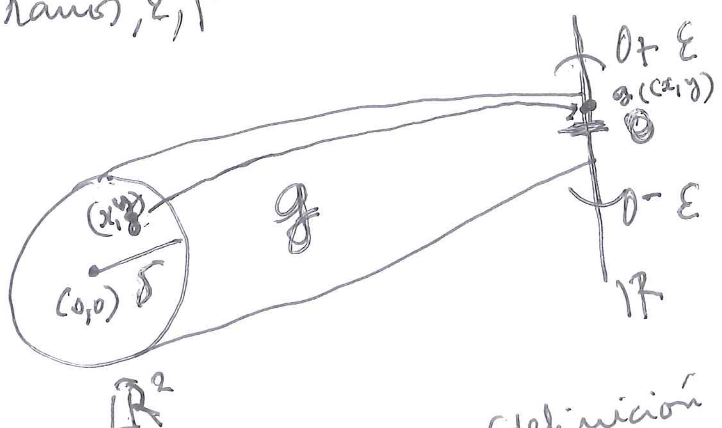
$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(0,0)?$$

$$¿\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^2+y^2} = 0\ ?$$

Tenemos que estudiar si $|g(x,y) - g(0,0)| \to 0$

es decir

$\left|\dfrac{x^4}{x^2+y^2} - 0\right|$ se puede hacer tan pequeño como queramos, ε, para todos los puntos tales que $\|(x,y)\| < \delta$



(definición de límite)

En efecto

$$\left| g(x,y) - g(0,0) \right| = \left| \frac{x^4}{x^2+y^2} \right| = \left| \frac{x^2 \cdot x^2}{(x^2+y^2)} \right| \leq$$

cantidad positiva

$$\leq \left| \frac{x^2 \quad x^2 + x^2+y^2}{(x^2+y^2)} \right| = \left| \frac{x^2 (x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right| =$$

$$= |x^2| = x^2 \rightarrow 0$$

Esta cantidad se puede hacer tan pequeña como queramos

Formalmente argumentos $\varepsilon - \delta$

Dado un $\varepsilon > 0$, ~~t~~omando $x < \delta = \sqrt{\varepsilon}$

$$|g(x,y) - g(0,0)| < x^2 < (\sqrt{\varepsilon})^2 = \varepsilon$$

Luego g es continua en $\mathbb{R}$

3) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida como

$$f(x,y) = e^{x-y}$$

Determine el polinomio de Taylor de f de orden 2 en el punto $(0,0)$.

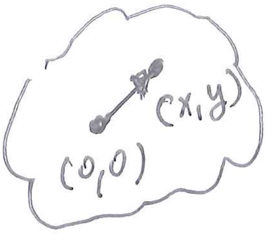
Recordemos que para campos escalares

$$f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + df(\vec{0})(\vec{x}) + \frac{1}{2!} d^2 f(\vec{0})(\vec{x}) + \dots$$

~~Cuando~~ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = f(0,0) + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}_{\text{gradiente}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2!}(x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(0,0) \end{pmatrix}}_{\text{Hessiano.}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \dots$$



En nuestro caso

$$f(x,y) = e^{x-y} \to f(0,0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = D_1(x,y) = e^{x-y} \to D_1(0,0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = D_2(x,y) = -e^{x-y} \to D_2(0,0) = -e^0 = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = D_{11}(x,y) = e^{x-y} \to D_{11}(0,0) = e^0 = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = D_{12}(x,y) = D_{21}(x,y) = -e^{x-y} \to$$

$$\to D_{12}(0,0) = D_{21}(0,0) = -e^0 = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x,y) = D_{22}(x,y) = e^{x-y} \Rightarrow D_2(0,0) = e^0 = 1$$

Luego el polinomio de Taylor de orden 2 en $f(0,0)$ es

$$f(x,y) \simeq f(0,0) + D_1(0,0)\,x + D_2(0,0)\,y +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[D_{11}(00)\,x^2 + 2D_{12}(0,0)\,xy + D_{22}(0,0)\,y^2\right] +$$

$$+ \dots$$

$$f(x,y) = 1 + 1x + (-1)y +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[1x^2 + 2(-1)\,xy + 1\,y^2\right] =$$

$$= 1 + x - y + \frac{1}{2}\left[x^2 - 2xy + y^2\right] + \dots$$

4 Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y,z) = x - y - z$$

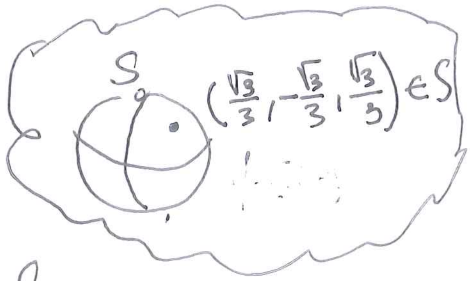
para $(x,y,z) \in S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } x^2+y^2+z^2=1\}$

Estudie si $f(x,y,z)$ alcanza un extremo condicionado a $(x,y,z) \in S$ en el punto $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Razone la respuesta

La restricción S es una esfera de radio $R=1$ $(x^2+y^2+z^2=1)$

La restricción es

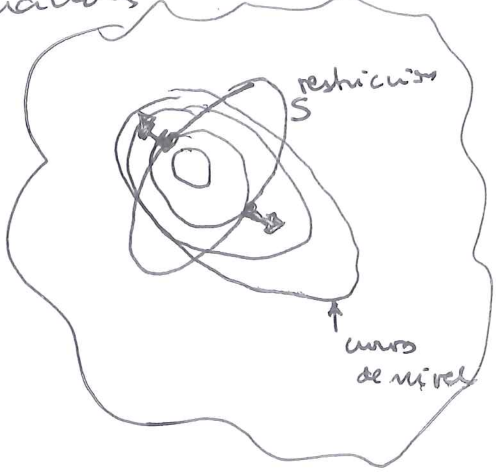
$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$



Podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases}$$

los extremos de f restringidos a S verifican este sistema de ecuaciones



Es decir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ g = 0 \end{cases}$$

En nuestro caso

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ -1 = 2\lambda z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ z = -\dfrac{1}{2\lambda} \end{cases} \\ \left(\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\dfrac{1}{2\lambda}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} = 1 \Rightarrow 4\lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto hay un extremo restringido

para

$$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z = -\dfrac{1}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\lambda = -\frac{\sqrt{3}}{2} \begin{cases} x = \dfrac{1}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ y = -\dfrac{1}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ z = \dfrac{-1}{2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Es decir, se alcanza un extremo condicionado en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y NO es el dado en el enunciado. El punto

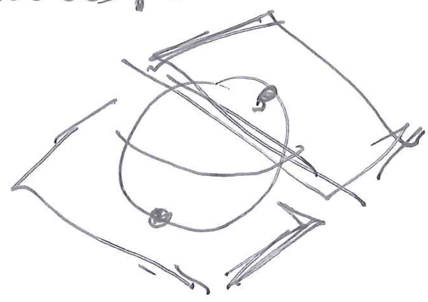
Interpretación geométrica

Las superficies de nivel de f son

$$f(x,y,z) = k \iff x - y - z = k$$

que son planos paralelos

Estos planos cortan sucesivamente a la Esfera hasta que son tangentes a la esfera en dos puntos. Uno es máximo y otro un mínimo

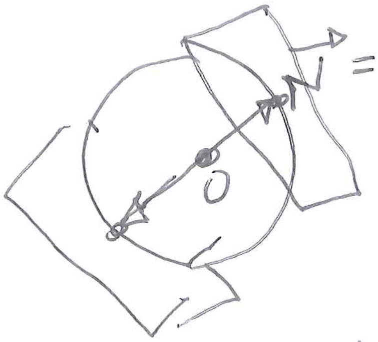


Comprobaremos el método de los multiplicadores de Lagrange (geométricamente)
En los extremos restringidos el vector normal del plano (superficie $f(x,y)=k$) (el gradiente) es de la misma dirección que el vector normal a S en su punto común (el gradiente)

Comprobaremos que el vector normal de plano $x-y-z=k$

$$\vec{N} \approx (1,-1,-1) \underset{\uparrow}{\approx} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

normalizado



$$\vec{N} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Los puntos extremos están en

$$(0,0,0) \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}$$

La distancia de un punto al plano

$$d(\pi_k, 0) = \frac{|0+0-0-k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}} = \frac{|k|}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\Longrightarrow |k| = \sqrt{3} = \begin{cases} k = +\sqrt{3} \\ k = -\sqrt{3} \end{cases}$$

EJERCICIOS

(5) Sea C la curva dada por

$$\vec{x}(t) = (t^3+2t,\ t^2-t,\ t^2-1)$$

para $t \in [-2,2]$

a) Estudie si la curva es regular en $\vec{x}(0)$ y si $\vec{x}(0)$ es un punto múltiple.

b) Determine la torsión de C en $\vec{x}(0)$

c) Calcule las ecuaciones de las rectas tangente y normal que pasan por $\vec{x}(0)$

d) Calcule la ecuación del plano osculador que pasa por $\vec{x}(0)$

a) La curva es regular ~~si~~ no tiene puntos singulares, es decir, no tiene puntos en los que la $\vec{x}' = (0,0\ 0)$ [es decir es regular si tiene tangente]

$$\vec{x}'(t) = (3t^2+2,\ 2t-1,\ 2t) \neq (0,0,0) \quad \forall t$$

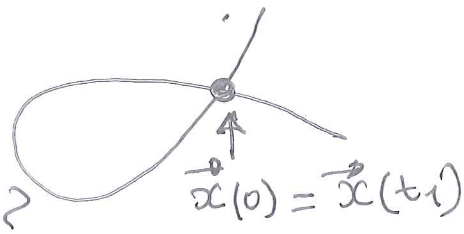
$$\begin{cases} 3t^2+2 = 0 \\ 2t-1 = 0 \\ 2t = 0 \end{cases}$$

para que se anule la tercera ecuación, $t=0$, pero este valor no anula simultaneamente la 1ª y 2ª ecuación

Por tanto C es regular $\forall t \in [-2,2]$

Vamos a ver si el punto $\vec{x}(0) = (0, 0, -1)$ es un punto múltiple

¿$\exists\, t_1$ tal que $\vec{x}(0) = \vec{x}(t_1)$?



$$\left\{ \begin{array}{l} t_1^3 + 2t_1 = 0 \\ t_1^2 - t_1 = 0 \\ t_1^2 - 1 = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

La tercera ecuación sólo se verifica si $t_1^2 = 0 \Rightarrow t_1 = 0$

Es decir $\vec{x}(t_1) = \vec{x}(0)$ solo si $t_1 = 0$

por tanto $\vec{x}(0)$ NO es un pto múltiple

b) Para curvas parametrizadas cualquiera

$$\tau(t) = \frac{\det(\vec{x}'(t), \vec{x}''(t), \vec{x}'''(t))}{\|\vec{x}'(t) \times \vec{x}''(t)\|^2}$$

$\vec{x}'(t) = (3t^2+2, 2t-1, 2t) \to \vec{x}'(0) = (2, -1, 0)$

$x''(t) = (6t, 2, 2) \to \vec{x}''(0) = (0, 2, 2)$

$x'''(t) = (6, 0, 0) \to \vec{x}'''(0) = (6, 0, 0)$

$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (2, -1, 0) \times (0, 2\ 2) = (-2, -4, 4)$

$\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16+16} = 6$

$$\det\left[\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Por tanto la torsión en $\vec{x}(0)$ es

$$\tau(0) = \frac{\det\left(\vec{x}'(0), \vec{x}''(0), \vec{x}'''(0)\right)}{\|\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\|^2} = \frac{-12}{36} = -\frac{1}{3}$$

c) La recta tangente pedida pasa por $\vec{x}(0) = (0,0,-1)$ y tiene por vector director $\vec{x}'(0) = (2,-1,0)$

$$T \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Forma paramétrica}} \Longleftrightarrow \underbrace{\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-1} = \frac{z+1}{0}}_{\text{Forma continua}}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2(z+1) = 0 \\ -x = 2y \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{\begin{cases} z+1 = 0 \\ x-2y = 0 \end{cases}}_{\text{Forma implícita.}}$$

La recta normal pedida pasa por $\vec{x}(0) = (0,0,-1)$ y tiene por vector director un vector en la dirección de $\vec{n}$

$$\left[\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0)\right] \times \vec{x}'(0) =$$

$$= \left[(2,-1,0) \times (0,2,2)\right] \times (2,-1,0) = (-2,-4,4) \times (2,-1,0)$$

$$= (4,8,10) \approx (2,4,5)$$

Por tanto la ecuación paramétrica de la recta normal a la curva en $\vec{x}(0)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{forma paramétrica}} \iff \underbrace{\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{4} = \frac{z+1}{5}}_{\text{forma continua}}$$

d) El plano osculador contiene como vectores directores el vector $\vec{t}$ y $\vec{n}$, y es perpendicular a $\vec{b}$, y se apoya en $\vec{x}(0) = (0,0,-1)$

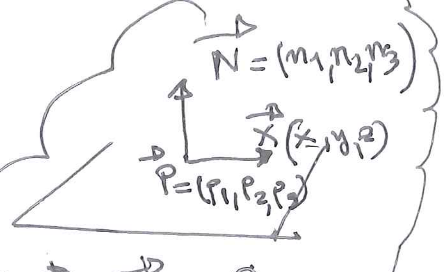
Por tanto, como el vector $\vec{b}$ lleva la dirección de

$$\vec{x}'(0) \times \vec{x}''(0) = (-2,-4,4) \approx (1,2,-2)$$

La ecuación del plano osculador es

$$1\,(x-0) + 2\,(y-0) - 2\,(z+1) = 0$$

$$\boxed{x + 2y - 2z - 2 = 0}$$



$$(\vec{X} - \vec{P}) \cdot \vec{N} = 0$$

6) Sea S la superficie dada por la parametrización

$$\vec{x}(u,v) = (uv^2, uv-1, v^2-uv)$$

a) Determine el conjunto M de puntos singulares de S respecto de esa parametrización

b) Determine la ecuación del plano tangente a S en el punto correspondiente a $u=1$, $v=1$

c) Determine la ecuación de la recta normal a S en el punto correspondiente a $u=1$, $v=1$.

Los puntos singulares de una curva respecto a una parametrización son aquellos en los que $\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \vec{0}$

No existe Plano Tangente $= \langle \vec{x}_u, \vec{x}_v \rangle$

En esos puntos

como

$$\vec{x} = (uv^2, uv-1, v^2-uv)$$

$$\vec{x}_u = (v^2, v, -v) \quad ; \quad \vec{x}_v = (2uv, u, 2v-u)$$

$$\vec{x}_u \times \vec{x}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v^2 & v & -v \\ 2uv & u & 2v-u \end{vmatrix} = (2v^2, -2v^3-uv^2, -uv^2) =$$

$$= (2v^2, -v^2(2v-u), -uv^2)$$

Este vector se anula si, simultaneamente, se verifica

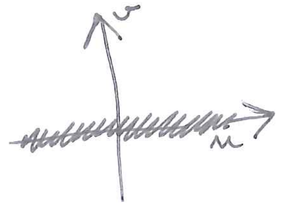
$$\begin{cases} 2v^2 = 0 \\ -v^2(2v-u) = 0 \\ -uv^2 = 0 \end{cases}$$

La tercera ecuación se anula si $v=0$ o bien $u=0$

Si $v=0$, se anulan las tres ecuaciones independientemente de lo que valga u

Por tanto, son puntos singulares

$$M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ tal que } v=0\}$$



b) Para calcular el plano tangente en $\vec{x}(1,1)$ tenemos en cuenta que

Punto de apoyo: $\vec{x}(1,1) = (1,0,0)$

Vectores directores: $\begin{cases} \vec{x}_u(1,1) = (1,1,-1) \\ \vec{x}_v(1,1) = (2,1,1) \end{cases}$

Vector normal: $\vec{x}_u(1,1) \times \vec{x}_v(1,1) =$

$$= (1,1,-1) \times (2,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,-3,-1)$$

Ecuación del plano

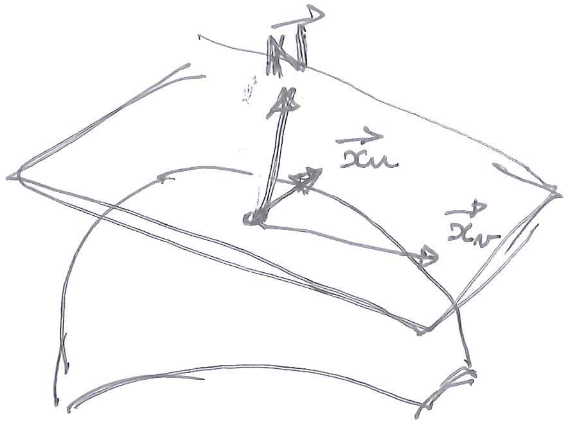
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 2(x-1)-3(y-0)-1(z-0)=0$$

$$2x-3y-z-2=0$$

c) La recta normal lleva la dirección del vector normal a la superficie $\vec{N}(1,1)$

El vector normal tiene la dirección de

$$\vec{x}_u(1,1)\times\vec{x}_v=(1,1,-1)\times(2,1,1)=(2,-3,-1)$$



La ecuación de la recta normal en $\vec{x}(1,1)=(1,0,0)$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\frac{x-1}{2}=\frac{y-0}{-3}=\frac{z-0}{-1}$$