Ejercicio 1 Febrero B 2019

Ejercicio 1 Hallar una matriz escalonada de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y, utilizando dicha matriz, calcular el rango de A.

RECORDATORIO

Las *operaciones elementales por filas* (ver página 14 del LT)

1. Permutar o intercambiar filas,

$$F_i \leftrightarrow F_j$$

2. Multiplicar una fila F_i por un escalar α no nulo,

$$\alpha F_i \rightarrow F_i$$

3. Remplazar una fila Fi por ella más el producto de un escalar α por otra fila Fj,

$$F_i + \alpha F_j \rightarrow Fi$$

Se llama *matriz elemental* (ver página 15 del LT) a la matriz cuadrada que resulta de realizar una sola operación elemental por filas en la matriz identidad.

Para reducir una matriz a su forma equivalente escalonada se utiliza el método de eliminación de Gauss. (Ver página 38 del LT)

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 - F_1 \rightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix} \underset{F_3 + 3F_2 \rightarrow F_3}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si se normalizan las cabeceras de fila, dividiendo toda la fila por el valor de la cabecera resulta

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez reducida la matriz a su forma escalonada, el rango es el número de filas con cabeceras no nulas (ver página 22 del LT). En este caso rang(A) = 3.

Una comprobación sería ver que

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$$

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) `A:matrix([0,2,-1],[1,5,0],[1,-1,2]);`

(%o1) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(%i2) `determinant(A);`

(%o2) 2

(%i3) `echelon(A);`

(%o3) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i4) `triangularize(A);`

(%o4) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(%i7) `rank(A);`

(%o7) 3