REDUCCIÓN DE UNA MATRIZ A FORMA ESCALONADA

Eliminación de Gauss usando *operaciones elementales de fila* de la forma

$$\boxed{F_i + \lambda F_j \to F_i}$$

Siendo $i > j$

La base del proceso de eliminación Gaussiana usando este tipo de transformación de filas es el hecho de que

Si ***p*** es el pivote (cabecera de la fila *i*), y ***a*** es la cabecera de la fila *j*. (la que se va a eliminar)

Se hace la transformación elemental de filas

$$\boxed{F_i + \left(-\frac{a}{p}\right) F_j \to F_i}$$

De manera que

$$\boxed{\begin{array}{c} F_{j\to} \\ \\ F_i \to \end{array} \begin{pmatrix} p & * & * \\ \dots & \dots & \dots \\ a & \& & \& \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} p & * & * \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \$ & \$ \end{pmatrix}}$$

Ejemplo:

Vamos a reducir a forma escalonada la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La primera fila tiene una cabecera de fila, $3 \neq 0$, que usaremos como *pivote* para hacer ceros en las filas que están debajo de él.

Para eliminar la cabecera de la segunda fila, *a* = 2, se hace la transformación

$$F_2 + \left(-\frac{2}{3}\right) F_1 \to F_2$$

Resultando

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Para eliminar la cabecera de la tercera fila, *a* = 6, se hace la transformación

$$F_3 + \left(-\frac{6}{3}\right) F_1 \to F_3$$

$$F_3 - 2F_1 \to F_3$$

Resultando

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Ahora, usaremos la cabecera de la segunda fila, $p = -5 \neq 0$, como pivote para eliminar las cabeceras de las filas que están por debajo.

Para eliminar la cabecera de la tercera fila, *a* = 9, se hace la transformación

$$F_3 + \left(-\frac{-9}{-5}\right) F_2 \to F_3$$

$$F_3 - \frac{9}{5} F_2 \to F_3$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

De esta forma hemos reducido la matriz original a una forma escalonada mediante tres operaciones elementales de fila.

<u>Comentario:</u> como las transformaciones de filas de la forma $F_i + \lambda F_j \to F_i$no alteran el valor del determinante, este proceso también nos ofrece un método para el cálculo de determinantes. Recordemos que en una matriz triangular el valor del determinate es el producto de los elementos de la diagonal.

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix} = 3(-5)\frac{11}{5} = -33$$

TRANSFORMACIONES *ELEMENTALES DE FILA* Y *MATRICES ELEMENTALES*

Una transformación elemental de filas equivale a premultiplicar por una *matriz elemental*.

Dada una transformación elemental de filas, la correspondiente matriz elemental es la que se obtiene al realizar dicha transformación elemental de filas a la matriz unidad.

Por ejemplo, la primera transformación elemental de filas que hicimos

$$F_2 - \frac{2}{3}F_1 \to F_2$$

aplicada a la matriz identidad resulta la matriz elemental

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = E_1 A$$

La segunda transformación elemental de filas que hicimos

$$F_3 - 2F_1 \to F_3$$

aplicada a la matriz identidad resulta la matriz elemental

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -9 & 4 \end{pmatrix} = E_2(E_1A) = E_2E_1A$$

La tercera transformación elemental de filas que hicimos

$$F_3 - \frac{9}{5}F_2 \rightarrow F_3$$

aplicada a la matriz identidad resulta la matriz elemental

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix} = E_3$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix} = E_3(E_2E_1A) = U$$

De modo que

$$E_3E_2E_1A = U$$

Si en esta expresión despejamos *A*

$$\begin{gathered}
{E_3}^{-1}E_3E_2E_1A = {E_3}^{-1}U \\
E_2E_1A = {E_3}^{-1}U \\
{E_2}^{-1}E_2E_1A = {E_2}^{-1}{E_3}^{-1}U \\
E_1A = {E_2}^{-1}{E_3}^{-1}U \\
{E_1}^{-1}E_1A = {E_1}^{-1}{E_2}^{-1}{E_3}^{-1}U \\
A = {E_1}^{-1}{E_2}^{-1}{E_3}^{-1}U
\end{gathered}$$

(%i1) `A:matrix([3,6,0],[2,-1,1],[6,3,4]);`

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(%i2) `echelon(A);`

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(%i3) `triangularize(A);`

$$(\%o3)\quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -15 & 3 \\ 0 & 0 & -33 \end{pmatrix}$$

(%i4) `lu_factor(A);`

$$(\%o4)\quad \left[\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ \frac{2}{3} & -5 & 1 \\ 2 & \frac{9}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}, [1,2,3], \mathit{generalring} \right]$$

(%i5) `get_lu_factors(%);`

$$(\%o5)\quad \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix} \right]$$

```
(%i11) U:matrix([3,6,0],[0,-5,1],[0,0,11/5]);
```

(%o11)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} \end{pmatrix}$$

```
(%i12) L:matrix([1,0,0],[2/3,1,0],[2,9/5,1]);
```

(%o12)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 2 & \frac{9}{5} & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i13) L.U;
```

(%o13)
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$