

Septiembre 2019 Ejercicio 1

Ejercicio 1 Comprobar si es cierta o falsa la siguiente proposición:
 Si $A, B \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ son dos matrices elementales entonces $A + B$ es una matriz elemental.
 Nota: Utilizar distintos ejemplos de matrices elementales.

Comentario: Cuando se hace a una matriz una *operación elemental de filas* equivale a pre-multiplicarla por una *matriz elemental*. Esa matriz elemental es la que se obtiene realizando la operación elemental de filas a la matriz identidad.

Por ejemplo, la matriz elemental que se corresponde a la transformación de filas

$$F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2$$

es el resultado de aplicar esa transformación elemental a la matriz identidad I .

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Es decir, que aplicar a la matriz A la transformación $[F_2 + 3F_1 \rightarrow F_2]$ para obtener A' es equivalente a pre-multiplicar la matriz A por E .

$$A' = E \cdot A$$

Una pista para resolver el problema: Las transformaciones elementales de filas transforman sistemas de ecuaciones en sistemas equivalentes y conservan el rango. Por consiguiente, todas las matrices elementales deben tener el mismo rango que la matriz identidad.

La respuesta a la pregunta que se plantea en el enunciado es negativa. Ya que se pueden sumar dos matrices de rango 3 y obtener una matriz matrices de un rango inferior.

Veamos el siguiente ejemplo: A y B son matrices elementales y, sin embargo, $A + B$ no lo es ya que es una matriz de rango 2.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2F_3 \rightarrow F_3} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_3 \rightarrow F_3} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = B$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

RECORDATORIO

Las *operaciones elementales por filas* (ver página 14 del LT)

1. Permutar o intercambiar filas,

$$F_i \leftrightarrow F_j$$

2. Multiplicar una fila F_i por un escalar α no nulo,

$$\alpha F_i \rightarrow F_i$$

3. Remplazar una fila F_i por ella más el producto de un escalar α por otra fila F_j ,

$$F_i + \alpha F_j \rightarrow F_i$$

Se llama *matriz elemental* (ver página 15 del LT) a la matriz cuadrada que resulta de realizar una sola operación elemental por filas en la matriz identidad.