Febrero 2023 A pregunta 1

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 PUNTO) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}.$$

Sabiendo que $\det A = 15$, calcule el siguiente determinante:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ 21 & 0 & -9 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ -4 & 6 & 10 & 3 & a+b \end{pmatrix}.$$

Solución:

Vamos a hacer transformaciones elementales que lleven la matriz dada A a la nueva matriz. Veremos que efecto producen en el determinante. (Ver página 27 del Libro de Texto).

Recordatorio:

1. Si en una matriz se permutan dos líneas (filas o columnas), el determinante cambia de signo.
 2. Si se multiplican todos los elementos de una línea por una constante, el determinante resulta multiplicado por esa constante.
 3. Si se reemplaza una línea por el resultado que resulta de sumar a esa línea un múltiplo de otra línea el determinante no varía.
- El determinante de una matriz es igual al determinante de su transpuesta.
 - El determinante de producto es igual al producto de los determinantes.

En nuestro caso

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_4} B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = -\det(A) = -15$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & -3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{3F_2 \rightarrow F_2} C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & -9 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = 3 \det(B) = -3 \det(A) = -145$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & -9 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -5 & 4 & 1 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow{F_5 + F_3 \rightarrow F_5} D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & -9 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -4 & 6 & 10 & 3 & a + b \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = \det(C) = 3 \det(B) = -3 \det(A) = -45$$

En definitiva,

$$\det \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 & 4 \\ 21 & 0 & -9 & 24 & 6 \\ 1 & 2 & 9 & 3 & a \\ 1 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ -4 & 6 & 10 & 3 & a + b \end{pmatrix} = -3 \det(A) = -45$$

Comentario:

Todas las propiedades que usamos para el cálculo de determinantes se deducen del hecho de que el determinante es una “aplicación multilineal (lineal en cada componente) alternada.

$$\det: E \times E \times \dots \times E \xrightarrow{\square} R$$

- 1) $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i + \vec{w}_i, \dots, \vec{v}_n) = \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) + \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{w}_i, \dots, \vec{v}_n)$
- 2) $\det(\vec{v}_1, \dots, \alpha \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) = \alpha \det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$
- 3) $\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n) = -\det(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_j, \dots, \vec{v}_i, \dots, \vec{v}_n)$

Otras propiedades de los determinantes

- Si una línea de un determinante es el vector cero, el determinante es cero.
- Si una línea del determinante es combinación lineal de las otras, el determinante es cero.