ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE ESPACIO VECTORIAL

(E, +, $\cdot\mathbb{R}$) se dice que tiene estructura algebraica de ESPACIO VECTORIAL si se cumplen las siguientes propiedades:

- (E, +, $\cdot\mathbb{R}$) con respecto a la operación interna + es un *grupo conmutativo*

  1) Propiedad asociativa de la suma de vectores:
  Para cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ de *E,* se verifica que

  $$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$$

  2) Elemento neutro de la suma de vectores:
  Existe un vector elemento neutro, $\vec{0}$, tal que para cualquier vector $\vec{v}$ de *E* se verifica que

  $$\vec{v}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{v}=\vec{v}$$

  3) Elemento opuesto respecto a la suma de vectores:
  Dado cualquier vector, $\vec{v}$, existe su vector opuesto, $(-\vec{v})$,tal que se verifica que

  $$\vec{v}+(-\vec{v})=(-\vec{v})+\vec{v}=\vec{0}$$

  4) Propiedad conmutativa de la suma de vectores:
  Para cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de *E,* se verifica que

  $$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$

- (E, +,$\cdot\mathbb{R}$) con respecto a la operación externa de multiplicación de escalares por vectores se verifican las siguientes propiedades.

  5) Propiedad distributiva de la multiplicación por escalares respecto a la suma de vectores:
  Para cualesquiera que sean los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de *E* y cualquier escalar, λ, se verifica que

  $$\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$$

6) Propiedad distributiva vectores respecto a la suma de escalares:
Para cualquier vector $\vec{v}$ de *E* y cualesquiera escalares, λ y μ, se verifica que

$$(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$$

7) Propiedad asociativa respecto al producto de escalares:
Para cualquier vector $\vec{v}$ de *E* y cualesquiera escalares, λ y μ, se verifica que

$$(\lambda\mu)\vec{v} = \lambda(\mu\vec{v})$$

8) Propiedad del escalar unidad.
Para cualquier vector $\vec{v}$ de *E* al multiplicarlo por la unidad escalar, 1, se verifica que

$$1\vec{v} = \vec{v}$$

EJEMPLOS

$\mathbb{R}^n$, $\mathcal{M}_{n\times m}$, $\mathcal{V}$, (segmentos orientados), $\wp_3[x]$ (polinomios de grado menor o igual que tres), $\mathfrak{C}[0,1]$ (funciones continuas en el intervalo [0,1]).

PROPIEDADES

(que se deducen de los axiomas)

1. El elemento neutro es único
2. El elemento opuesto es único
3. El escalar 0 por cualquier vector es el vector cero
4. El escalar (-1) por un vector, es su vector opuesto
5. Cualquier escalar por el vector cero, es igual al vector cero.

COMBINACIÓN LINEAL DE VECTORES

Una combinación lineal de los vectores

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n\}$$

Es una expresión

$$\lambda_1\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{v}_n$$

SUBESPACIO GENERADO POR UN SISTEMA DE VECTORES

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n \rangle = \{\vec{x} \in E / \vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n\}$$

Se dice que $\overrightarrow{\{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$ es un *sistema de generadores*

INDEPENDENCIA LINEAL

Un sistema de vectores

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n\}$$

Se dice que es linealmente independiente si ninguno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los otros.

BASE, DIMENSIÓN y COORDENADAS de un vector referidas a una base

En un espacio vectorial, un sistema de generadores linealmente independiente se dice que es una BASE del Espacio vectorial.

- En un espacio vectorial todas las bases tienen en mismo número de elementos. Ese número de elemtos de las bases se llama la DIMENSIÓN del Espacio Vectorial.

- Todo vector del espacio se puede expresar de manera única como combinación lineal de los elementos de una base. Esos coeficientes se llaman las COORDENADAS del vector referido a dicha base.