

Septiembre 2018 Ejercicio 2

Ejercicio 2 Siendo $\mathcal{P}_3(x)$ el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x , se pide razonar si el sistema $\{x, x^3, x^2 - 2x, 3x^3 + 2\}$ es o no una base suya.

Comentario: El conjunto $\mathcal{P}_3(x)$ tiene estructura de espacio vectorial.

Si en el espacio $\mathcal{P}_3(x)$ se considera la base canónica

$B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ podemos identificar los polinomios con los vectores de \mathbb{R}^4 de sus coordenadas.

Los polinomios del sistema dado tienen las siguientes coordenadas

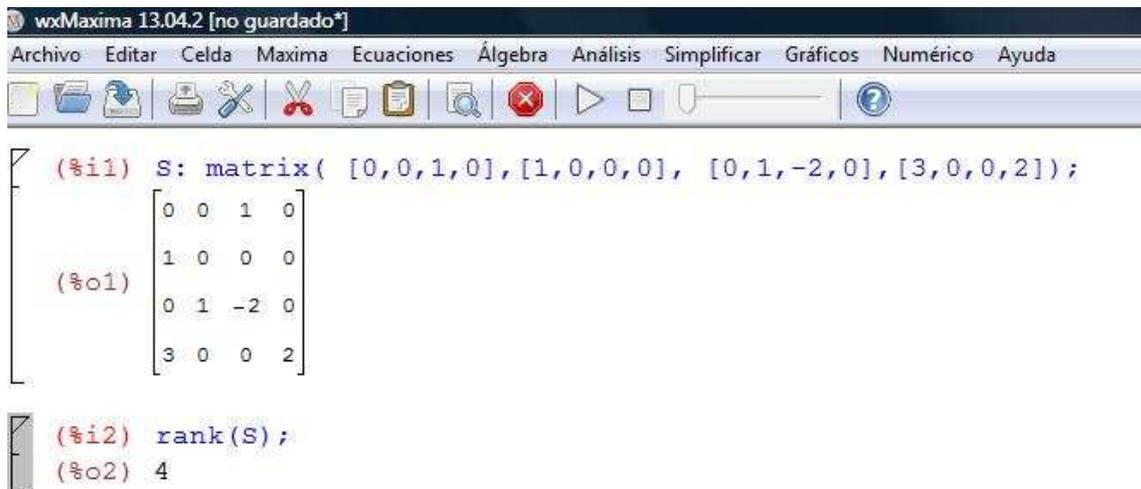
$$\begin{array}{lll} x & \rightarrow & (0, 0, 1, 0) \\ x^3 & \rightarrow & (1, 0, 0, 0) \\ x^2 - 2x & \rightarrow & (0, 1, -2, 0) \\ 3x^3 + 2 & \rightarrow & (3, 0, 0, 2) \end{array}$$

Para que el sistema de vectores sea una base hay que comprobar que su rango es igual a la dimensión del espacio. Es decir 4.

Para estudiar el rango de un sistema de vectores lo reducimos a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora se ve claramente que el rango del sistema es 4, que es la dimensión del espacio y, por tanto, son base.



```
wxMaxima 13.04.2 [no guardado*]
Archivo  Editar  Celda  Maxima  Ecuaciones  Álgebra  Análisis  Simplificar  Gráficos  Numérico  Ayuda

(%i1) S: matrix( [0,0,1,0], [1,0,0,0], [0,1,-2,0], [3,0,0,2]);
(%o1)
[ 0 0 1 0
  1 0 0 0
  0 1 -2 0
  3 0 0 2 ]

(%i2) rank(S);
(%o2) 4
```