Septiembre 2018 Ejercicio 2

Ejercicio 2 Siendo $\wp_3(x)$ el espacio vectorial de los polinimios de grado menor o igual que 3 en la variable x, se pide razonar si el sistema $\{x, x^3, x^2-2x, 3x^3+2\}$ es o no una base suya.

Comentario: El conjunto $P_3(x)$ tiene estructura de espacio vectorial.

Si en el espacio $P_3(x)$ se considera la base canónica
$B = \{x^3, x^2, x, 1\}$ podemos identificar los polinomios con los vectores de R^4 de sus coordenadas.

Los polinomios del sistema dado tienen las siguientes coordenadas

x	→	(0, 0,1 ,0)
x^3	→	(1, 0, 0, 0)
$x^2 - 2x$	→	(0, 1, –2, 0)
$3x^3 + 2$	→	(3, 0, 0, 2)

Para que el sistema de vectores sea una base hay que comprobar que su ranfgo es igual a la dimensión del espacio. Es decir 4.

Para estudiar el rango de un sistema de vectores lo reducimos a forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora se ve claramente que el rango del sistema es 4, que es la dimensión del espacio y, por tanto, son base.