ÁLGEBRA

curso 2023-24

Examen Sept 2024

allave@madrid.uned.es

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Sabiendo que las matrices $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ satisfacen

$$A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Calcule A^2-B^2

¡Cuidado! (En matrices no es cierto que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados)

Calculemos:

$$(A+B)(A-B) = A^2 - \underbrace{AB+BA}_{} - B^2$$

¡Ojo! porque el producto de matrices no es conmutativo

Calculemos A y B resolviendo un sistema de ecuaciones matriciales

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}}$$

(ver comprobación con MAXIMA pag 4)

2 (1 punto) Calcule las coordenadas de la matriz $A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$ respecto a la siguiente base de $M_{2\times 2}$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

4

```
linsolve([A+B=M,A-B=N],[A,B]);
```

$$\left[A=\frac{N+M}{2}, B=\frac{M-N}{2}\right]$$

```
M:matrix([3,3],[1,3]); N:matrix([1,-1],[-1,3]);
```

$$\begin{pmatrix}3 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

```
A:(1/2)·(M+N);
```

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

```
B:(1/2)·(M-N);
```

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

```
A.A;
```

$$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

```
B.B;
```

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

```
A.A-B.B;
```

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 7\end{pmatrix}$$

ojo con potencias de matrices en MAXIMA

$A^2 = A$^^2

```
A^^2;
```

$$\begin{pmatrix}4 & 5\\ 0 & 9\end{pmatrix}$$

```
B^^2;
```

$$\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

```
M.N;
```

$$\begin{pmatrix}0 & 6\\ -2 & 8\end{pmatrix}$$

ojo con matrices

$\neq (A+B)(A-B) \neq$

$\neq A^2-B^2$

Se ~~trata~~ de escribir

$$\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Es un sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{cases} 11 = a + c - 3d \\ -2 = b + 2c + d \\ -7 = 2a + b + 4d \\ 1 = b \end{cases}$$

Se ve claramente que $b = 1$, con lo cual se puede reducir a un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

$$\begin{cases} a + c - 3d = 11 \\ 2c + d = -3 \\ 2a + 4d = -8 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + c - 3d = 11 \\ 2c + d = -3 \\ a + 2d = -4 \end{cases}$$

Resolvemos este sistema usando el método de eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & -15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 11 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 & -33 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} a + c - 3d = 11 \\ 2c + d = -3 \\ d = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ c = 0 \\ d = -3 \end{cases}.$$

Por consiguiente

$$a=2;\ b=1;\ c=0;\ d=-3$$

Comprobación:

$$2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 4 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -7 & 1\end{pmatrix}$$

```
linsolve([11=a+c-3·d,-2=b+2·c+d,-7=2·a+b+4·d,1=b],[a,b,c,d]);
        [a=2,b=1,c=0,d=-3]
```

3 Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ las aplicaciones lineales definidas por $f(x,y)=(x+y,\ 5y,\ -2x)$ y $g(x,y,z)=3x-y+z$. Halle la representación matricial de la aplicación compuesta $g\circ f$ y calcule $g\circ f\,(3,2)$

Comprobación: Este problema también lo podríamos haber hecho de una manera explícita así:

$$(g\circ f)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix}x+y\\5y\\-2x\end{pmatrix} =$$

$$= 3(x+y) - (5y) + (-2x) =$$

$$= 3x+3y-5y-2x =$$

$$= x-2y = \underbrace{(1,-2)}_{\text{matriz de }(g\circ f)}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

En particular,

$$g\left[f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right] = g\begin{pmatrix}5\\10\\-6\end{pmatrix} = 15-10-6 = -1$$

que coincide con lo calculado anteriormente.

```
f(x,y):=[x+y,5·y,-2·x];
```

$$f(x,y):=[x+y,5\,y,(-2)\,x]$$

```
A:jacobian(f(x,y),[x,y]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

```
g(x,y,z):=[3·x-y+z];
```

$$g(x,y,z):=[3\,x-y+z]$$

```
B:jacobian(g(x,y,z),[x,y,z]);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
f(3,2);
```

$$[5,10,-6]$$

```
g(5,10,-6);
```

$$[-1]$$

```
B.A;
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

```
g(x+y,5·y,(-2)·x);
```

$$[3\,(y+x)-5\,y-2\,x]$$

```
expand(%);
```

$$[x-2\,y]$$

```
jacobian(g(x+y,5·y,(-2)·x),[x,y]);
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4) (1 punto) calcule el determinante de una matriz A de orden 5 que es semejante a una matriz diagonal D cuyos valores propios son -5 y -2 con multiplicidades algebraicas 1 y 4 respectivamente

Recordatorio: (pag 148)

Definición: La matriz A' es semejante a la matriz A si existe una matriz regular P, llamada "matriz de paso", tal que

$$A' = P^{-1} A P$$

[Si referido a una base, A es la matriz del endomorfismo f. y A' es la matriz de ese mismo endomorfismo referido a otra base, entonces $A' = P^{-1}AP$]

* Si A y A' son semejantes, tienen el mismo determinante

$$\det(A') = \det(P^{-1}AP) =$$

$$= \det(P^{-1}) \det(A) \det(P) =$$

$$= \det(A)$$

[ya que $\det(P^{-1}) \det(P) = \det(P^{-1}P) = \det(I) = 1$]

Por tanto $\det(A) = \det(D)$

como

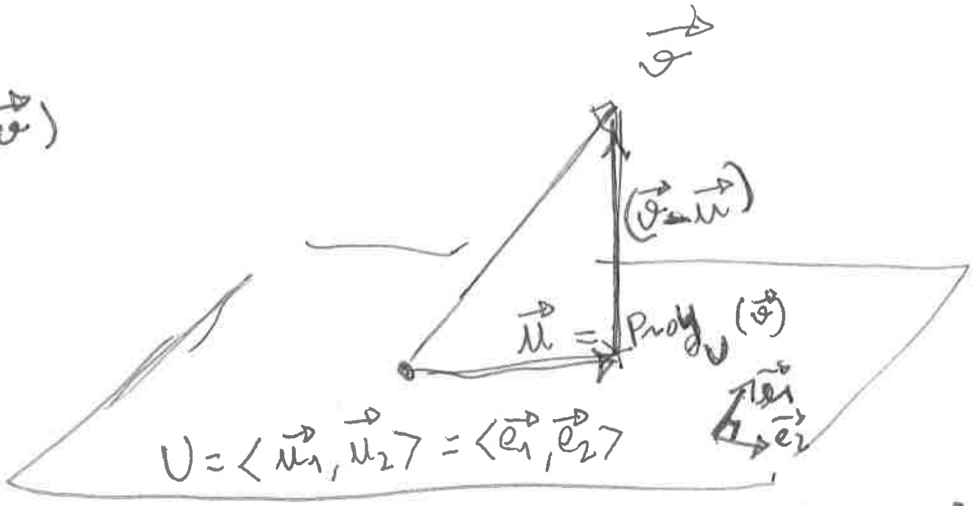
$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det(D) = (-5)(-2)^4 = -5 \cdot 16 = -80$$

5 Calcule la proyección ortogonal del vector $\vec{v} = (0,1,0,0)$ sobre el subespacio vectorial $U = \langle (3,0,0,4), (-4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3) \rangle$

Recordatorio: (pag 210) $\boxed{\vec{u} = \left(\frac{\vec{e_1} \cdot \vec{v}}{\vec{e}_1 \cdot e_1}\right) \vec{e_1} + \left(\frac{\vec{e_2} \cdot \vec{v}}{\vec{e_2} \cdot \vec{e_2}}\right) \vec{v_2}}$

$\vec{u} = \mathrm{Proy}_U(\vec{v})$



$\{\vec{u_1}, \vec{u_2}\} \xrightarrow[\text{Gram-Schmidt}]{\text{Proceso de}} \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ (base ortogonal de U)

En el método de ortogonalización de Gram-Schmidt

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{e}_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \langle \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{u}_1 \rangle \\ \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle \\ \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2 \end{cases}$$

$$(\vec{u}_2 + \lambda \vec{e}_1) \cdot \vec{e}_1 = 0 \Rightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1 + \lambda (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}$$

así pues.

$$\boxed{\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \dfrac{\vec{u}_2 \cdot \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1} \vec{e}_1 \end{cases}}$$

En nuestro caso:

$$U = \langle \vec{u}_1 = (3,0,0,4), \ \vec{u}_2 = (-4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3) \rangle$$

$$\vec{e}_1 = u_1 = (3,0,0,4)$$

$$\vec{e}_2 = (-4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3) - \frac{(-4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3) \cdot (3,0,0,4)}{(3,0,0,4) \cdot (3,0,0,4)} (3,0,0,4)$$

$$= (4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3) - \frac{0}{24} (3,0,0,4) =$$

$$= (4, \sqrt{12}, \sqrt{12}, 3)$$

¡¡ sorpresa !! $\vec{e}_2 = \vec{u}_2$

Esto significa que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ es una base ortogonal de U. En efecto

comprobamos que

$$(3,0,0,4)\cdot(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3) = 0$$

(Si me hubiese dado cuenta desde el principio no hubiese sido necesario el método de Gram-Schmidt)

Para calcular la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre U

$$\vec{u} = \mathrm{Proy}_U(\vec{v}) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$$

Para determinar los coeficientes c_1 y c_2 consideramos que el vector

$$(\vec{v}-\vec{u}) \perp U \Rightarrow \begin{cases} (\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{e}_1 = 0 \\ (\vec{v}-\vec{u})\cdot\vec{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{e}_1 - (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_1 = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{e}_2 - (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2)\cdot\vec{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}\cdot\vec{e}_1 - c_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 + \cancel{c_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1}^{\,0} = 0 \\ \vec{v}\cdot\vec{e}_2 - \underbrace{\cancel{c_1\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2}}_{0} + c_2\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1} \\ c_2 = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{e}_2}{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{u} = \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_1}{\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1}\vec{e}_1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{e}_2}{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2}\vec{e}_2}$$

Se llaman coeficientes de Fourier

14

En nuestro caso

$$\mathrm{Proy}_V(\vec{v}) = \frac{(0,1,0,0)\cdot(3,0,0,4)}{(3,0,0,4)\cdot(3,0,0,4)}(3,0,0,4) +$$

$$+ \frac{(0,1,0,0)\cdot(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3)}{(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3)\cdot(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3)}(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3) =$$

$$= \frac{0}{24}(3,0,0,4) + \left(\frac{\sqrt{12}}{16+12+12+9}\right)(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3) =$$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{49}(-4,\sqrt{12},\sqrt{12},3) = \boxed{\left(-\frac{8\sqrt{3}}{49}, \frac{12}{49}, \frac{12}{49}, \frac{6\sqrt{3}}{49}\right)}$$

Una comprobación sería ver que, efectivamente $(\vec{v}-\vec{u}) \perp \vec{u}_1$ y $(\vec{v}-\vec{u}) \perp \vec{u}_2$

[Lo hacemos con ~~wx~~maxima]

```
u1:[3,0,0,4];
```
$$[3,0,0,4]$$

```
u2:[-4,sqrt(12),sqrt(12),3];
```
$$[-4,2\sqrt{3},2\sqrt{3},3]$$

```
v:[0,1,0,0];
```
$$[0,1,0,0]$$

```
u1.u2;
```
$$0$$

```
load(eigen);
```
/usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/matrix/eigen.mac

```
A:matrix(u1,u2);
```
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 4 \\ -4 & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

```
gramschmidt(A);
```
$$\left[[3,0,0,4],\left[-2^2,2\sqrt{3},2\sqrt{3},3\right]\right]$$

```
e1:[3,0,0,4];
```
$$[3,0,0,4]$$

```
e2:[-2^2,2·sqrt(3),2·sqrt(3),3];
```
$$[-4,2\sqrt{3},2\sqrt{3},3]$$

```
u:(v.e1)/(e1.e1)·e1+(v.e2)/(e2.e2)·e2;
```
$$\left[-\frac{8\sqrt{3}}{49},\frac{12}{49},\frac{12}{49},\frac{2\,3^{3/2}}{49}\right]$$

```
(v-u).u1;
```
$$0$$

```
(v-u).u2;
```
$$0$$

6 (1 punto) Sea

$$Q(x_1,x_2) = a x_1 + 10 x_1 x_2 + a x_2^2$$

una forma cuadrática con $a \neq 0$.
Calcule el rango de Q en función del parámetro a.

Recordatorio: (pag 258)

El rango de una forma cuadrática Q es el rango de la matriz A asociada

La matriz asociada a la forma cuadrática Q es

$$Q(x_1,x_2) = (x_1 \; x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} a & 5 \\ 5 & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= a x_1^2 + 10 x_1 x_2 + a x_2^2$$

Para estudiar el rango de la matriz A la reducimos a forma escalonada usando el método de Gauss

teniendo en cuenta que $a \neq 0$, lo podemos usar como pivote

$$\begin{pmatrix} a & 5 \\ 5 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a & 5 \\ 0 & a^2-25 \end{pmatrix}$$

Estudiamos los valores críticos que anulan las cabeceras de fila

$a \neq 0$ (siempre por lo que dice el enunciado)

$a^2-25=(a+5)(a-5)=0 \implies a=5$ ó $a=-5$

Por consiguiente

$$\begin{cases} \text{Si } a=5 \text{ o } a=-5 & \text{rango}(A)=1 \\ \text{Si } a\neq 5,\ a\neq -5,\ a\neq 0; & \text{rang}(A)=2 \end{cases}$$

PROBEMAS

7 (a) Sea V ~~un~~ espacio vectorial, y U_1, U_2 subespacios vectoriales de V. Defina los subespacios suma $U_1 + U_2$ e intersección $U_1 \cap U_2$ (0,5 puntos)

(b) Sean U_1 y U_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

- $U_1 = \langle (2,0,2,1), (0,3,1,0) \rangle$
- $U_2 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x=0,\ y-3z=0\}$

Calcule de manera razonada una base de $U_1 + U_2$ y una base de $U_1 \cap U_2$. (1 pto)

(c) Considere el conjunto $U_1 \cup U_2$. Determine de manera razonada si $U_1 \cup U_2$ es o no un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ (0,5 puntos).

a) (pag 93) Recordatorio:

$U_1 + U_2 = \{ \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \text{ tal que } \vec{u}_1 \in U_1 \text{ y } \vec{u}_2 \in U_2 \}$

$U_1 \cap U_2 = \{ \vec{x} \text{ tales que } \vec{x} \in U_1 \text{ y } \vec{x} \in U_2 \}$

- U_1 esta expresado en forma paramétrica

$$U_1 = \langle (2,0,2,1), (0,3,1,0) \rangle$$

Está claro que los vectores generadores de U_1 son l.i. ya que forman un sistema escalonado

Escribiremos U_1 en forma implícita eliminando parámetros

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}_{\lambda, \mu \in \mathbb{R}}$$

los vectores (x,y,z,t) de U_1 se caracterizan por que

$$\operatorname{rango} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2y & 2z-2x & 2t-x \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 6z-6x-2y & 6t-3x \end{pmatrix} = A'$$

Para que $\text{ran}(A) = \text{ran}(A^*) = 2$

$$\begin{cases} -6x - 2y + 6z = 0 \\ -3x + 6t = 0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ x - 2t = 0 \end{cases}} \; U_1$$

Comprobación: Comprobamos que los vectores $(2,0,2,1)$ y $(0,3,1,0)$ verifican este sistema de ecuaciones

Comentario: Se pueden eliminar más fácilmente a ojo ($\lambda = t$; $\mu = \frac{1}{3}z$ ...)

■ U_2 está expresado en forma implícita como la solución del sistema

$$\begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

Si queremos describir U_2 es forma paramétrica tenemos que hallar la solución general del sistema en función de 2 parámetros.

Por ejemplo $t = \lambda$, $z = \mu$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 3\mu \\ z = \mu \\ t = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \langle (0,0,0,1), (0,3,1,0) \rangle$$

$$U_1+U_2=\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{U_1}\qquad\underbrace{\qquad}_{U_2}$$

Buscamos un sitema de generadores de U_1+U_2 que sea linealmente independiente

$$\begin{pmatrix} 2&0&2&1\\ 0&3&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&3&1&0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2&0&2&1\\ 0&3&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$U_1+U_2=\left\langle \begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

Por consiguiente

$\boxed{\{(2,0,2,1),(0,3,1,0),(0,0,0,1)\} \text{ es una base de } U_1+U_2}$

Si queremos hallar una base de $U_1 \cap U_2$ tenemos que resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 3x+y-3z=0 \\ x-2t=0 \end{array}\right\} U_1 \\ \left.\begin{array}{l} x=0 \\ y-3z=0 \end{array}\right\} U_2 \end{array}\right.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -2t = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

La solución general depende de un parámetro $z = \lambda$

$$\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 3\lambda \\ z &= \lambda \\ t &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente $\boxed{U_1 \cap U_2 = \langle (0,3,1,0) \rangle}$

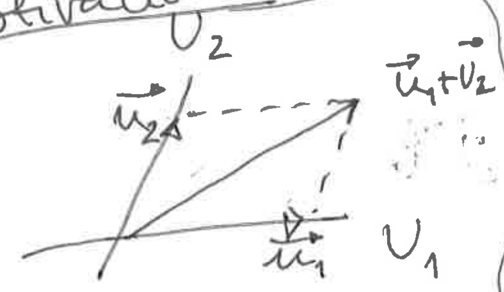
comprobación:

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2)$$

$$3 = 2 + 2 - 1$$

(c) $U_1 \cup U_2$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$

motivación



$\vec{u}_1+\vec{u}_2 \notin U_1 \cup U_2$

Consideramos un vector de U_1 y otro vector de U_2

$\vec{u}_1 = (2,0,2,1) \in U_1 \in U_1 \cup U_2$

$\vec{u}_2 = (0,0,0,1) \in U_2 \in U_1 \cup U_2$

de modo que

$\vec{u}_1+\vec{u}_2 = (2,0,2,2) \notin U_1 \cup U_2$

Este vector no pertenece a U_1 ni a U_2

lo comprobamos fácilmente usando las ecuaciones implícitas de U_1 y U_2

$$U_1 : \begin{cases} 3x + y - 3z = 0 \\ x - 2t = 0 \end{cases}$$

$\vec{u}_1+\vec{u}_2 = (2,0,2,2) \notin U_1$

$$U_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases}$$

$\vec{u}_1+\vec{u}_2 = (2,0,2,2) \notin U_2$

Por tanto, $\vec{u}_1+\vec{u}_2 \notin U_1 \cup U_2$

```
eliminate([x=2·a,y=3·b,z=2·a+b,t=a],[a,b]);
```

$$[-2\,(3\,z-y-3\,x),\,x-2\,t]$$

```
linsolve([x=0,y-3·z=0],[x,y]);
```

$$[x=0,\,y=3\,z]$$

8) Considere la siguiente matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Demuestre que A no es diagonalizable (1 punto)
- Calcule la matriz de Jordan asociada a A (1 punto)

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - \Bigg(\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{9} + \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{6} + \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}}_{12} \Bigg) \lambda + 27$$

$$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 27\lambda + 27 = 0$$

- Autovalores

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = 0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -9 & 27 & -27 \\ 3 & & 3 & -18 & 27 \\ \hline & 1 & -6 & 9 & 0 \\ 3 & & 3 & -9 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

el Pol. característico tiene una raíz real triple

$m = 3$ (triple)

($p(\lambda)$ es un cubo perfecto)

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 = (\lambda - 3)^3$$

Autoespacios $E(\lambda)=\{\vec{x}$ tal que $(A-\lambda I)\vec{x}=0\}$

$$E(3)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$=\{y-z=0 \quad = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

como $\dim(E(3))=2 \neq$ multiplicidad$(3)=3$

La matriz A NO es diagonalizable

(Para que una matriz sea diagonalizable las dimensiones del autoespacio de un autovalor tiene que ser igual a su multiplicidad algebraica como raíz del polinomio característico)

Buscamos la matriz de Jordan

Si aplicamos las reglas que la pag 169 y pag 170

* El número de bloques correspondiente a un autovalor es igual a su multiplicidad geométrica

En nuestro caso para $\lambda=3$, como $\dim(E(3))=2$. Habrá dos bloques

* En la diagonal secundaria habrá tantos unos no propios que se necesitan para completar la base.

En nuestro caso se necesitara un "1"

Así pues,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

<u>Comentario</u> Las posibles matrices de Jordan con un autovalor triple son

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
A:matrix([3,0,0],[0,4,-1],[0,1,2]);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

```
load(eigen);
```

/usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/matrix/eigen.mac

```
PC:charpoly(A,m);
```

$$((2-m)(4-m)+1)(3-m)$$

```
expand(PC);
```

$$-m^3+9m^2-27m+27$$

```
factor(PC);
```

$$-(m-3)^3$$

```
eigenvalues(A);
```

$$[[3],[3]]$$

```
eigenvectors(A);
```

$$[[[3],[3]],[[[1,0,0],[0,1,1]]]]$$

```
load(diag);
```

/usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac

```
j:jordan(A);
```

$$[[3,2,1]]$$

```
dispJordan(j);
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

```
P:ModeMatrix(A,j);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

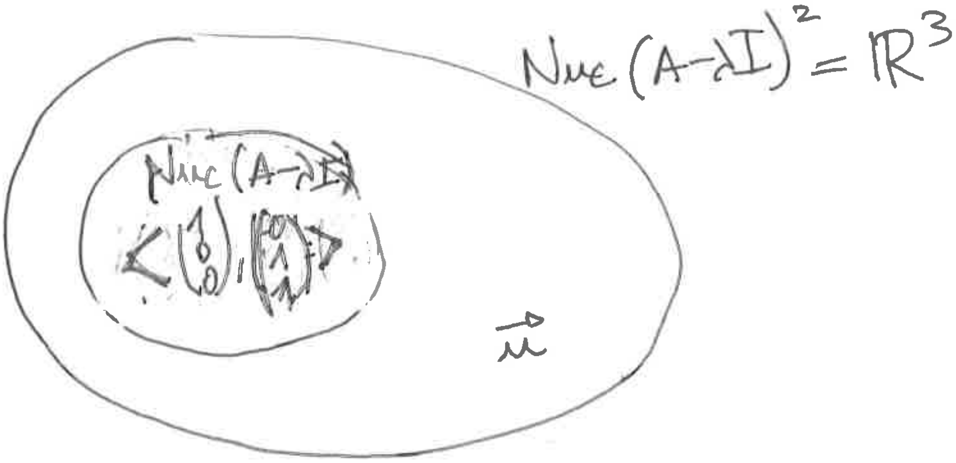
```
invert(P);
```

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

```
invert(P).A.P;
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aunque no lo piden podríamos calcular la matriz de Paso, P, de modo que $J = P^{-1} A P$



Calculamos la sucesión

$$Nuc(A-\lambda I) \subset Nuc(A-\lambda I)^2 \subseteq Nuc(A-\lambda I)^3 \cdots$$

$$(A-\lambda I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con lo que $Nuc(A-\lambda I)^2 = \mathbb{R}^3$

Buscamos un vector $\vec{u}$ que esté en $Nuc(A-\lambda I)^2$ pero que no esté en $Nuc(A-\lambda I)$

Por ejemplo, $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Calculamos

$$\vec{v} = (A-\lambda I)\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in Nuc(A-\lambda I)$$

$\vec{w}$ ~~es~~ otro vector, que junto con $\vec{v}$, forme una base de $Nuc(A-\lambda I)$. Por ejemplo,

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si tomamos la base $B = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\} =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \underbrace{P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz de Paso}}$$

Se tiene que

$(A-\lambda I)\vec{w} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad A\vec{w} = \lambda\vec{w}$

$(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

Además, tal como se ha definido $\vec{v}$

$(A-\lambda I)\vec{u} = \vec{v} \quad \Rightarrow \quad A\vec{u} = \vec{v} + \lambda\vec{u}$

Referido a la base B

Los transformados de la base por A son

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{u} = \vec{v} + \lambda\vec{u} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A\vec{w} = \lambda\vec{w} \xrightarrow[B]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

con lo cual la matriz ~~de~~ A referida a la base B es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$