Febrero de 2016 Ejercicio 4

Ejercicio 4 La matriz A de filas $(2,2,1)$, $(1,3,1)$ y $(1,2,2)$ posee: **A)** Un único valor propio y vale 5; **B)** Un sólo subespacio de vectores propios; **C)** Una matriz equivalente diagonal; **D)** Ninguna de las anteriores.

La matriz dada es

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Que (1, 1, 0) es un valor propio significa que, para algún λ, tal que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que

$$\begin{cases} a+1=\lambda \\ b+2=\lambda \\ c-1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\lambda-1 \\ b=\lambda-2 \\ c=1 \end{cases}$$

Que (-1, 0, 1) es un valor propio significa que, para algún μ, tal que

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ b & 2 & 1 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo que significa que

$$\begin{cases} -a+2=-\mu \\ -b+1=0 \\ -c+1=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2+\mu \\ b=1 \\ c=1-\mu \end{cases}$$

De todas estas condiciones se deduce fácilmente que $a=2$, $b=1$, $c=1$, $\lambda=3$, $\mu=0$

Con lo cual, la matriz *A* es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

También $\lambda=3$ y $\mu=0$ son dos autovalores.

Vamos a estudiar la posible diagonalización de la matriz *A*.

1) Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= -\lambda^3 + (2+2+1)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda + 0 = -\lambda(\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

2) Autovalores

$$\lambda = 0; \lambda = 2; \lambda = 3$$

3) Autoespacios (autovectores)

$$E(0) = Nuc(A - \lambda I) = \left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \langle\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

$$E(2) = Nuc(A - \lambda I) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$$

$$E(3) = Nuc(A - \lambda I) = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \langle\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle$$

Por tanto, la matriz *A* es diagonalizable. La respuesta correcta es **A**

Comentario:

La matriz diagonal es $J = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso es $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ de modo que $J = P^{-1}AP$.

(%i1) A: matrix([2,1,2],[1,2,1],[1,-1,1]);

(%o1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(%i2) load(diag);

(%o2) */usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac*

(%i4) charpoly(A,m);

(%o4) $m+2\,(m-3)+((1-m)\,(2-m)+1)\,(2-m)$

(%i5) factor (%);

(%o5) $-(m-3)\,(m-2)\,m$

(%i7) eigenvalues(A);

(%o7) [[3,2,0],[1,1,1]]

(%i6) eigenvectors(A);

(%o6) $\left[[[3,2,0],[1,1,1]],\left[[[1,1,0]],[[1,2,-1]],[[1,0,-1]]\right]\right]$

(%i8) J:jordan(A);

(%o8) [[3,1],[2,1],[0,1]]

(%i9) D:dispJordan(J);

(%o9) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(%i10) P:ModeMatrix(A,J);

(%o10) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$