Septiembre 2023 Problema 8

8. (2 PUNTOS) Considere la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Estudie si existe una matriz diagonal y semejante a A (1 PUNTO).
- Calcule de manera razonada A^{546} (1 PUNTO).

Respuesta

Estudiamos si la la matriz A se puede digonalizar.

- Polinomio característico

$$\det(A-\lambda I) = det\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 0\lambda + (-1) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

- Autovalores

$$\lambda^2 - 1 = 0 \longrightarrow \quad \lambda = -1\ ;\ \lambda = 1$$

- Autoespacios

$$E(-1) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -1-(-1) & 0 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{x_1 + x_2 = 0 = \langle\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\rangle$$

$$E(1) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -1-1 & 0 \\ 2 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{x_1 = 0 = \langle\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle$$

Comentario:

La matriz A de diagonalizable ya que

- El polinomio característico tiene raíces reales
- Para cada uno de los autovalores, la multiplicidad algebraica del autovalor es igual a la dimensión de su autoespacio

- La matriz diagonal, J, y matriz de paso, P, de modo que $J=P^{-1}AP$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentario:

Como la matriz es diagonalizable, la matriz diagonal tiene en la diagonal los autovalores. La matriz de paso es la que tiene por columnas los autovectores. Los autovectores forman la base respecto de la cual la expresión analítica del homomorfismo es la expresión diagonal

Comentario:

Una observación: La matriz A es igual a su inversa. Es decir, $A^2=I$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esto significa que cualquier potencia par de A es igual a A, y cualquier potencia par de A es I.

Comentario:

Comprobamos que $J = P^{-1}AP \leftrightarrow PJ = AP$

$$PJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la potencia de una matriz A, utilizamos el siguiente razonamiento

Despejando en $J=P^{-1}AP$, *resulta*

$$A = PJP^{-1}$$

Hallamos las potencias de A

$$A^2 = (PJP^{-1})(PJP^{-1}) = PJ(PP^{-1})JP^{-1} = PJ^2P^{-1}$$

$$A^3 = A^2A = (PJ^2P^{-1})(PJP^{-1}) = PJ^2(P^{-1}P)JP^{-1} = PJ^3P^{-1}$$

En general

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

Las potencias de una matriz diagonal son muy fáciles de calcular. Basta con elevar a la potencia los elementos de la diagonal

En nuestro caso particular tenemos

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 1^n \end{pmatrix}$$

Por consiguiente,

$$A^{546} = PJ^{546}P^{-1}$$

$$A^{546} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{546} & 0 \\ 0 & 1^{546} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i1) A:matrix([-1,0],[2,1]);
```

$$(\%o1)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) charpoly(A,m);
```

$$(\%o3)\quad (-m-1)(1-m)$$

```
(%i4) eigenvalues(A);
(%o4) [[-1,1],[1,1]]

(%i5) eigenvectors(A);
(%o5) [[[-1,1],[1,1]],[[[1,-1]],[[0,1]]]]

(%i6) load(diag);
(%o6) /usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac

(%i17) J:jordan(A);
(%o17) [[-1,1],[1,1]]

(%i27) D:dispJordan(J);
```

$$(\%o27)\quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i33) P:ModeMatrix(A,J);
```

$$(\%o33) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i34) P^^(-1).A.P;
```

$$(\%o34) \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i35) A^^546;
```

$$(\%o35) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i36) D^^546;
```

$$(\%o36) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```
(%i38) P^^(-1).(D^^546).P;
```

$$(\%o38) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$