Enero 2010 A Problema

Problema

a)(2ptos.) La matriz asociada a una aplicación lineal f en las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz asociada al cambio de base de $\{(1,0),(0,1)\}$ a $B' = \{(1,1),(2,3)\}$ y la imagen (mediante f) del vector $(2,3,2)$ expresado en la base B'.

b)(2ptos.) Calcular el subespacio de vectores propios asociados al valor propio -2 (de multiplicidad algebraica 2) de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

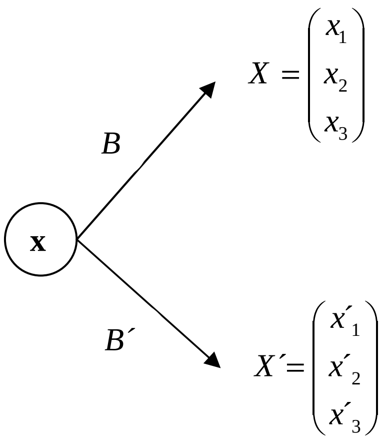
y decidir si A es diagonalizable.

Respuesta

La aplicación lineal f: $R^3 \rightarrow R^2$

a) Recordemos el efecto del cambio de base en las coordenadas de un vector

La relación que hay entre ambas expresiones de coordenadas es $X´ = PX$



$\boxed{X = PX´}$

En donde $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$ es la matriz de paso, que tiene por columnas las coordenadas de los elementos de la nueva base $B´$ referidos a la base B.

En nuestro caso se trata de un cambio de base en R^2. La base B = {(1,0), (0,1)} es la base canónica. Sea $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la expresión de un vector **x** respecto de B.

La base $B´$ = {(1,1), (2, 3)}. Sea $Y´ = \begin{pmatrix} y´_1 \\ y´_2 \end{pmatrix}$ la expresión del vector **x** referido a $B´$

La relación que hay entre estas dos expresiones analíticas del del mismo vector **x** es

$$Y = PY´$$

Donde P es la matriz de paso, que tiene por columnas los elementos de la la base $B´$. Así pues, en nuestro caso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

La relación que hay entre la expresión analítica de las coordenadas $Y´$ conocidas las coordenadas Y es

$$Y´ = P^{-1}Y$$

Vamos a calcular P^{-1}. Para ello usaremos el método de hacer operaciones elementales de fila que hagan la transformación

$$(P \mid I) \approx (I \mid P^{-1})$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

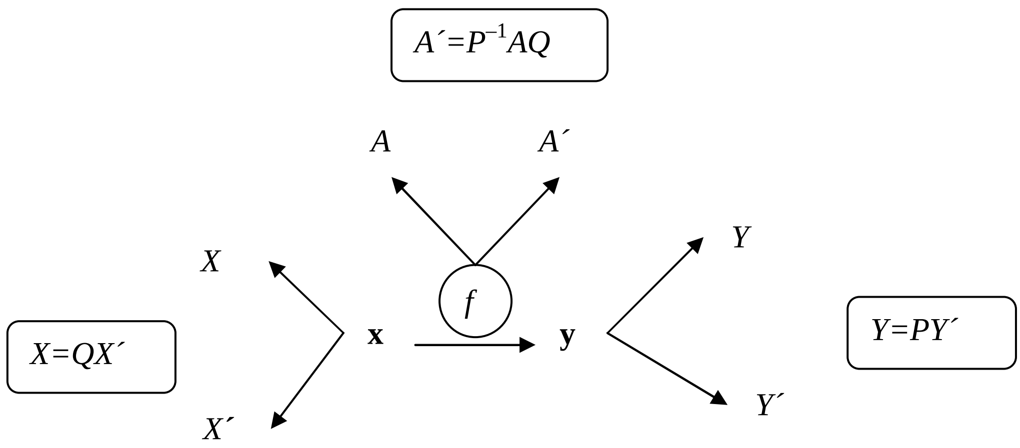
Así pues,

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es decir;

$$\begin{pmatrix} y´_1 \\ y´_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Efectos de los cambios de base en la matriz asociada a una aplicación lineal



La justificación de esta relación entre las matrices A y A' asociadas a una aplicación lineal, f, es esta:

$$Y = AX \quad \rightarrow \quad PY' = A\,QX' \quad \rightarrow \quad Y' = P^{-1}A\,QX'$$

Como $Y' = A'X'$, identificando, en ambas expresiones, resulta que $A' = P^{-1}AQ$.

La imagen del vector $f(2, 3, 2)$ expresado en la base canónica de R^2 es

$$Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix}_B$$

Si queremos expresar este mismo vector respecto a la base B', usaremos la relación que hemos hallado un poco más arriba, $Y' = P^{-1}Y$

$$Y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -3 \end{pmatrix}$$

b) Vamos a estudiar la diagonalización del endomorfismo de matriz

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 0\lambda^2 + 12\lambda + 16 = -(\lambda - 4)(\lambda + 2)^2$$

- Autovalores

Son las raíces del polinomio característico

$\lambda = 4$ (simple) $\qquad \lambda = -2$ (doble)

- Autoespacios

$$E(\lambda) = \{\mathbf{x} \text{ tal que } A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \text{ tal que } (A - \lambda I)\mathbf{x} = 0\}$$

$$E(4) = \left\{ \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} -7x + y - z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$E(-2) = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Para el estudio de este último autoespacio, $E(-2)$, previamente, hemos reducido el sistema a forma escalonada así:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ -7 & 7 & -1 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como la multiplicidad del autovalor $\lambda = -2$ es dos y su autoespacio tiene dimensión uno. No coinciden ambas. Por tanto, la matriz A NO es diagonalizable.

No obstante, sí admite una expresión de Jordan.

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$.

La expresión como matriz de Jordan va a ser de la forma (Ver página 169 del libro de teoría)

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Para el caso del autoespacio $E(4)$ no hay ningún problema y su autovector será el tercer vector de la base.

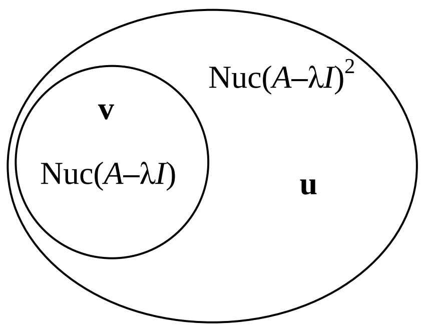
Para hallar una base del subespacio $E(-2)$ tenemos que considerar la cadena de núcleos de las sucesivas potencias de $(A - \lambda I)$

$$\mathrm{Nuc}(A - \lambda I) \subset \mathrm{Nuc}(A - \lambda I)^2$$

En nuestro caso:

$$\mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I) = E(-2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{Nuc}\,(A - \lambda I)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\{ -x + y = 0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.\right.$$



Buscamos un vector **u** que esté en $\mathrm{Nuc}(A-\lambda I)^2$, pero que no esté en $\mathrm{Nuc}(A-\lambda I)$

Por ejemplo, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculamos $\mathbf{v} = (A–\lambda I)\ \mathbf{u}$

En nuestro caso, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comentario: El vector $\mathbf{v} \in \text{Nuc}(A - \lambda I)$

Para construir la matriz de paso, debemos elegir adecuadamente la base de referencia. Para ello tenemos en cuenta que

$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A\ \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

$(A - \lambda I)\ \mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad A\ \mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$

Si consideramos la base $B = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, en ese orden se tiene que

$$A\ \mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad A\ \mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

El vector $\mathbf{w}$ es la base de $E(4)$.

Así pues,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: Una comprobación de $J = P^{-1}AP$ es verificar que $PJ = AP$

$$PJ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

wxMaxima 13.04.2 [no guardado*]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) A:matrix([-3,1,-1],[-7,5,-1],[-6,6,-2]);

(%o1) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$

(%i2) charpoly(A,m);

(%o2) $-6(5-m)+7(-m-2)+((-m-2)(5-m)+6)(-m-3)+48$

(%i3) expand(%);

(%o3) $-m^3+12m+16$

(%i4) factor(%);

(%o4) $-(m-4)(m+2)^2$

(%i5) eigenvalues(A);

(%o5) [[4,-2],[1,2]]

(%i6) eigenvectors(A);

(%o6) [[[4,-2],[1,2]],[[[0,1,1]],[[1,1,0]]]]

(%i11) M:matrix([-1,1,-1],[-7,7,-1],[-6,6,0]);

(%o11) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -7 & 7 & -1 \\ -6 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

(%i12) M^^2;

(%o12) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \\ -36 & 36 & 0 \end{bmatrix}$

(%i13) triangularize(%);

(%o13) $\begin{bmatrix} -36 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Bienvenido a wxMaxima

```
(%i14) load(diag);
(%o14) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contr
```

```
(%i15) j:jordan(A);
(%o15) [[4,1],[-2,2]]
```

```
(%i17) dispJordan(j);
```

(%o17) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

```
(%i18) ModeMatrix(A,j);
```

(%o18) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$