Febrero 2017 Ejercicio 4

> **Ejercicio 4** El endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f \circ g$, siendo $f(x, y) = (x, -y)$ y $g(x, y) = (2x - y, 0)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, verifica que: **A)** Tiene dos valores propios distintos; **B)** NO es diagonalizable; **C)** La matriz asociada en la base canónica es simétrica; **D)** Ninguna de las anteriores.

Aplicando directamente la definición de las funciones *f* y *g,* resulta que

$$f \circ g\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = f\left[g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} 2x - y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Comentario: las letras variables que sirven para definir una función son mudas y deben interpretarse como que sirven para describir una regla.

Otra manera de obtener la matriz asociada a la función $f \circ g$ es tener en cuenta que la matriz asociada a una aplicación lineal es la que tiene por columnas los transformados de los elementos de la base.

$$f \circ g\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = f\left[g\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = f\left[g\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = f\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz de $f \circ g$ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comentario: En nuestro caso, tanto la función *f* como la función *g* son aplicaciones lineales. Estas son sus matrices asociadas.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_g = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De modo que

$$f \circ g\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] f\left[g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = A_f A_g \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A continuación, vamos a seguir los pasos para estudiar si la matriz *A* es digonalizable.

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det\begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 0 = \lambda(\lambda - 2)$$

- Autovalores

Las raíces del polinomio característico son

$$\lambda = 2 \qquad\qquad \lambda = 0$$

Ambas raíces son de multiplicidad *m* = 1

- Autoespacios

$$E(2) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; tal \; que \; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{y = 0\} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

$$E(0) = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \; tal \; que \; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{2x - y = 0\} = \left\langle\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\rangle$$

Como para cada uno de los autovalores su multiplicidad es igual a la dimensión de su autoespacio correspondiente, resulta que la matriz es diagonalizable.

La matriz diagonal es $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

En consecuencia, la respuesta correcta es la OPCIÓN **A.**