Septiembre 2018 Ejercicio 4

Ejercicio 4 Utilizando la teoría de diagonalización, hallar el valor de A^{100} siendo $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

<u>Respuesta:</u>

Supongamos que J es la expresión diagonal de A, de manera que $J = P^{-1}AP$.

A partir de esta relación se deduce que $J^n = P^{-1}A^nP$. En efecto,

$$J^n = (P^{-1}AP)\cdot(P^{-1}AP) \ldots\ldots (P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})A(P\,P^{-1})\ldots\ldots AP = P^{-1}A^nP\cdot$$

Despejando A^n en la expresión $J^n = P^{-1}A^nP$, resulta que

$$A^n = PJ^nP^{-1}$$

Así pues, para resolver el ejercicio, empezamos por calcular la expresión diagonal de A y su correspondiente matriz de paso.

- Polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

Comentario: Los coeficientes del polinomio característico son *invariantes* al cambio de base, es decir, no dependen de la expresión analítica del endomorfismo.

Para el caso de matrices cuadradas de orden 2, los coeficientes del polinomio característico son:

- Coeficiente de λ^2: +1
- Coeficiente de λ: $-(a_{11} + a_{22})$ (El opuesto de la traza de la matriz)
- Término independiente: $+\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (El determinante de la matriz)

- Autovalores

Las raíces del polinomio característico

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 3 \qquad \lambda = 2$$

- Autoespacios

$$E(3) = \{(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{-3x + 2y = 0 = \left\langle\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\rangle\right.$$

$$E(2) = \{(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \left\{\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{-x+y=0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\right.$$

- Expresión diagonal, J, y matriz de paso, P, tal que $J = P^{-1}AP$

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: Comprobamos que $PJ = AP$

$$PJ = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad AP = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos ahora en cuenta que la potencia de una matriz diagonal es también una matriz diagonal.

$$J^n = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Calcularemos la matriz P^{-1} usando el método que consiste en hacer operaciones elementales de fila que transformen P en la identidad. Esas transformaciones transformarán la identidad en P^{-1}.

$$(P \mid I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{2F_2-3F_1\to F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{F_1+F_2\to F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{array}\right) \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{array}\right) \approx (I \mid P^{-1})$$

De esta manera resulta que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Aplicando la fórmula $A^n = PJ^nP^{-1}$, que dedujimos al principio,

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}^{100} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 3^{100} & 2^{100} \\ 3\cdot 3^{100} & 2^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2\cdot 3^{100} + 3\cdot 2^{100} & 2\cdot 3^{100} - 2\cdot 2^{100} \\ -3\cdot 3^{100} + 3\cdot 2^{100} & 3\cdot 3^{100} - 2\cdot 2^{100} \end{pmatrix} = 3^{100}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + 2^{100}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

```
(%i2) A:matrix([0,2],[-3,5]);
```

$$(\%o2)\quad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

```
(%i3) charpoly(A,m);
```

$$(\%o3)\quad 6-(5-m)\,m$$

```
(%i4) expand(%);
```

$$(\%o4)\quad m^2-5\,m+6$$

```
(%i5) solve(%=0,m);
```

$$(\%o5)\quad [m=3,m=2]$$

```
(%i6) eigenvalues(A);
```

$$(\%o6)\quad [[3,2],[1,1]]$$

```
(%i7) eigenvectors(A);
```

$$(\%o7)\quad \left[[[3,2],[1,1]],\left[\left[\left[1,\frac{3}{2}\right]\right],[[1,1]]\right]\right]$$

```
(%i8) load(diag);
(%o8) /usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac
(%i9) j:jordan(A);
```

$$(\%o9)\quad [[3,1],[2,1]]$$

```
(%i10) dispJordan(j);
```

$$(\%o10)\quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

```
(%i11) ModeMatrix(A,j);
```

$$(\%o11)\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(%i12) P:matrix([2,1],[3,1]);

(%o12) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

(%i13) P^^(-1);

(%o13) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

(%i14) J:matrix([3,0],[0,2]);

(%o14) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(%i15) P^^(-1).A.P;

(%o15) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(%i16) is (A^^(100)=P.J^^(100).P^^(-1));

(%o16) *true*

(%i17) is(A^^(100)=matrix([-2·3^100+3·2^100, 2·3^100-2·2^100],[-3·3^100+3·2^100, 3·3^100-2·2^100]));

(%o17) *true*

(%i18) is(A^^100=(3^^100·matrix([-2,2],[-3,3])+2^^100·matrix([3,-2],[3,-2])));

(%o18) *true*