Febrero 2019 B problema 1)

Problemas Se pide:

a) (1 pto.) Calcular, si es posible, una matriz diagonal semejante a

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de los subespacios de vectores propios asociados.

b) (1 pto.) Explicar en qué consiste el método de factorización QR de una matriz A tal que el sistema de vectores definido por las columnas de A, Col$A$, es linealmente independiente.

c) (1 pto.) Si f es una aplicación lineal, tal que el subespacio núcleo asociado tiene dimensión cero, probar que:

si $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ es un sistema libre o linealmente independiente, entonces también lo es $\{f(\bar{v}_1), f(\bar{v}_2)\}$.

<u>Respuesta</u>

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + (2+3+1)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \right) + \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8$$

Comentario: Los coeficientes del polinomio característico son *invariantes* al cambio de base, es decir, no dependen de la expresión analítica del endomorfismo.

Para el caso de matrices cuadradas de orden 3, los coeficientes del polinomio característico son:

- Coeficiente de λ^3: (-1)
- Coeficiente de λ^2: $+ (a_{11} + a_{22} + a_{33})$ (La traza de la matriz)
- Coeficiente de λ: $-\left(\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \right)$ (El opuesto de la suma de los adjuntos de los elementos de la diagonal).
- Término independiente: $+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ (El determinante de la matriz)

- Autovalores

Definición: Se dice que λ es un autovalor de A si para algún vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se verifica que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$

Para que λ sea un autovalor de A tiene que ocurrir que el sistema $A\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tenga solución distinta de la trivial es decir, el determinante de la matriz de los coeficientes tiene que ser cero.

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

Los *autovalores* son las raíces del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3 = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = 2 \text{ (triple)}$$

multiplicidad (2)= 3.

- Autoespacios

El autoespacio; $E(\lambda)$, correspondiente al autovalor λ es:

$$E(\lambda) = \{\mathbf{x} \text{ tal que } A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\} = \{\mathbf{x} \text{ tal que } (A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

En coordenadas:

$$E(\lambda) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

En nuestro caso, el autoespacio; $E(2)$, correspondiente al autovalor $\lambda = 2$, son las soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftrightarrow \quad \{ y - z = 0$$

La solución general del sistema va a depender de dos parámetros $x = t$, $y = s$

$$\begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = s \end{cases} \quad \leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La dimensión de este subespacio es dos:

$$\dim(E(2)) = 2$$

Como la multiplicidad algebraica del autovalor $\lambda = 2$ es tres y la dimensión de su autoespacio (también llamada multiplicidad geométrica) es diferente, resulta que la matriz no es diagonalizable.

Comentario: Para que la matriz real de un endomorfismo sea diagonalizable es necesario que se den las siguientes condiciones:

1) Que todas las raíces del polinomio característico (autovalores) sean reales.

2) Que para cada autovalor su multiplicidad algebraica como solución del polinomio característico sea igual a la dimensión de su autoespacio. Es decir, para cada autovalor

$$\text{multiplicidad}(\lambda) = \dim(E(\lambda))$$

Cuando la matriz es diagonalizable, en la expresión diagonal los términos de la diagonal son los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad. Una base respecto la cual la expresión del endomorfismo es diagonal es la que tiene por elementos las bases de los autoespacios.

Las matrices con autovalores reales que no admiten diagonalización, admiten una expresión "casi" diagonal que se llama matriz de tipo Jordan. (Ver página 169 del libro de teoría). Este es el caso de la matriz que aparece en el enunciado del problema

Para determinar la matriz de Jordan hay que tener en cuenta lo siguiente:

1) El número de bloques correspondientes a cada valor propio es la dimensión del autoespacio asociado. Es decir la multiplicidad geométrica.

2) Los bloques correspondientes a un mismo valor propio se disponen sobre la diagonal principal consecutivamente, de modo que sus tamaños sean no crecientes.

3) Tiene en la diagonal secundaria tantos "1" como vectores no propios se necesitan para completar una base de vectores propios.

En nuestro caso, para el autovalor $\lambda = 2$, va a haber dos cajas de Jordan, ya que la dimensión de su autoespacio es 2.
Va a haber un "1" en la diagonal secundaria.

Por tanto

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Para hallar la matriz de paso P, tal que $J = P^{-1}AP$, necesitamos buscar una base respecto de la cual el endomorfismo tenga la expresión de Jordan

Para ello, primero, hacemos la sucesión de núcleos de las sucesivas potencias de $(A - \lambda I)$

$$\text{Nuc}(A - \lambda I) \subset \text{Nuc}(A - \lambda I)^2 \subset \text{Nuc}(A - \lambda I)^3 \subset \ldots..$$

En nuestro caso:

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right.$$

$$\text{Nuc}\,(A-\lambda I)^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = R^3 \right.$$

Buscamos un vector **u** que esté en Nuc(A–λI)^2, pero que no esté en Nuc(A–λI)

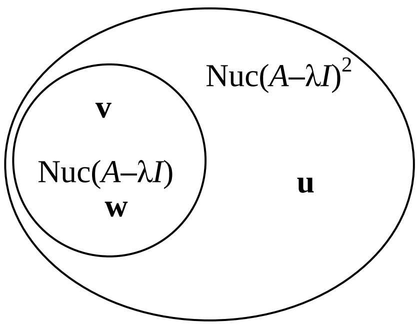
Por ejemplo, **u** = $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calculamos **v** = (A–λI) **u**

En nuestro caso **v** = $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Comentario: El vector **v** $\in$ Nuc(A – λI)

En efecto, $(A - \lambda I)\mathbf{v} = (A - \lambda I)\,(A - \lambda I)\mathbf{u} = (A - \lambda I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$



Ahora debemos buscar un vector **w** que, junto con **v**, forme una base de Nuc(A – λI)
Por ejemplo

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comentario: Vamos a ver en qué orden tenemos que elegir los vectores de la base para obtener la forma de Jordan que deseamos.

Como **w** y **v** pertenecen al Nuc($A - \lambda I$) se tiene que

$(A - \lambda I)\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$

$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Además, tal como se ha definido **v**,

$(A - \lambda I)\,\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \rightarrow \quad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u}$

Si consideramos la base $B = \{\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{w}\}$, en ese orden se tiene que

$$A\,\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\,\mathbf{u} = \mathbf{v} + \lambda\mathbf{u} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A\,\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} \quad \underset{B}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Resulta, que en este caso, para esta matriz de Jordan, la matriz de paso, P, que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base es:

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La comprobación de que, en efecto, $J = P^{-1}AP$, la hacemos viendo la igualdad equivalente $PJ = AP$. (De esta manera nos ahorramos calcular la inversa de una matriz)

$$PJ = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$AP = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wxMaxima 13.04.2 [febrero 2019 B problema 1.wxm]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) A:matrix([2,2,-2],[0,3,-1],[0,1,1]);

(%o1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(%i2) I:matrix([1,0,0],[0,1,0],[0,0,1]);

(%o2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(%i3) A-m*I;

(%o3) $\begin{bmatrix} 2-m & 2 & -2 \\ 0 & 3-m & -1 \\ 0 & 1 & 1-m \end{bmatrix}$

(%i4) determinant(A-m*I);

(%o4) $((1-m)(3-m)+1)(2-m)$

(%i5) charpoly(A,m);

(%o5) $((1-m)(3-m)+1)(2-m)$

(%i8) factor(charpoly(A,m));

(%o8) $-(m-2)^3$

(%i9) solve (charpoly(A,m)=0, m);

(%o9) $[m=2]$

(%i10) eigenvalues(A);

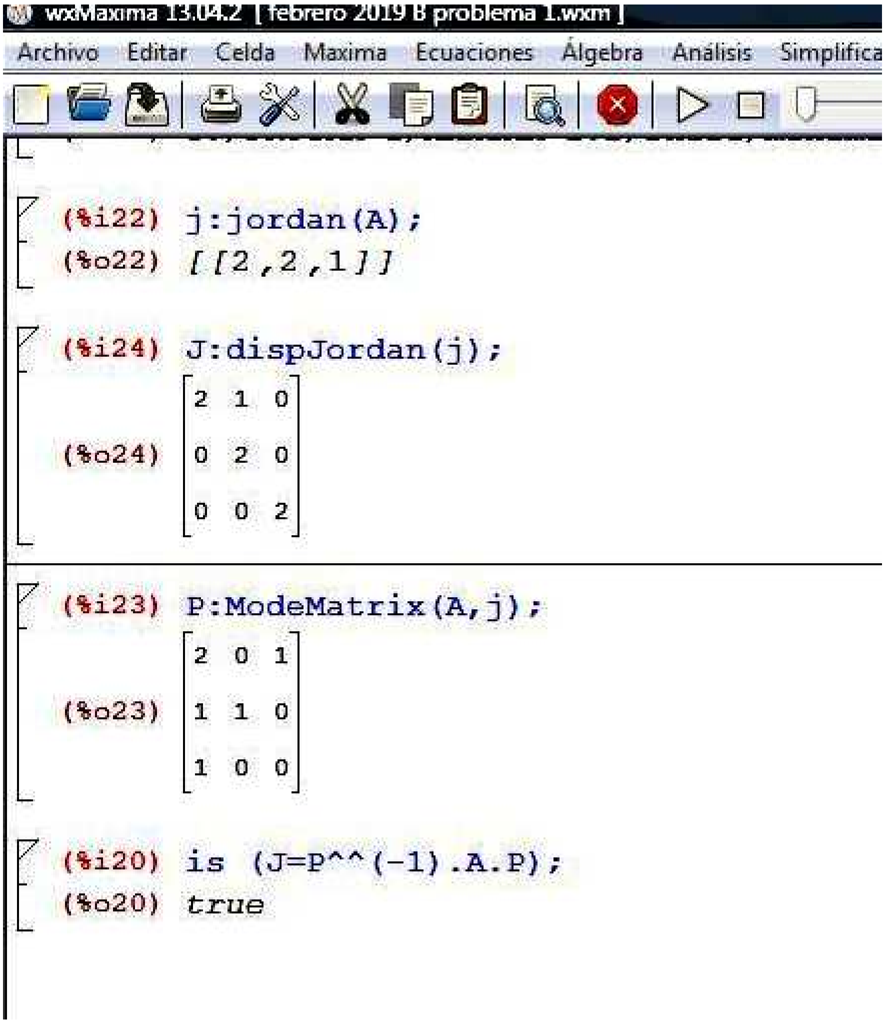
(%o10) [[2],[3]]

(%i11) /* Autovalor, multiblicidad, base del autoespacio*/
eigenvectors(A);

(%o11) [[[2],[3]],[[[1,0,0],[0,1,1]]]]

(%i12) load(diag);

(%o12) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/contrib/diag.mac


wxMaxima 13.04.2 [febrero 2019 B problema 1.wxm]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplifica
(%i22) j:jordan(A);
(%o22) [[2,2,1]]
(%i24) J:dispJordan(j);
(%o24)
2 1 0
0 2 0
0 0 2
(%i23) P:ModeMatrix(A,j);
(%o23)
2 0 1
1 1 0
1 0 0
(%i20) is (J=P^^(-1).A.P);
(%o20) true