Febrero 2018 A problema a)

Problemas Se pide:

a) Calcular el subespacio V de $\mathbb{R}^4$ de todos los vectores que son ortogonales a $(0,1,-1,4)$ y $(2,1,1,0)$ (0.5 ptos.). Hallar el subespacio $V^\perp \subset \mathbb{R}^4$, ortogonal a V (0.5 ptos.).

b) Hallar una base en la que la forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$$

se exprese en forma canónica (sólo tiene términos cuadrados) (1 pto.).

c) Explicar la factorización LU para matrices regulares (0.5 ptos.) y enunciar una aplicación (0.5 ptos.).

<u>Respuesta</u>

Consideramos el producto escalar habitual de R^4.

Para definir el subespacio V, buscamos los vectores que verifican

$$\begin{cases}(x,y,z,t)\bullet(0,1,-1,4)=0\\(x,y,z,t)\bullet(2,1,1,0)=0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}y-z+4t=0\\2x+y+z=0\end{cases}$$

Estas son las ecuaciones implícitas de V. Vamos a calcular las ecuaciones paramétricas. Para ello, buscaremos la solución general del sistema. La solución general del sistema dependerá de dos parámetros. Como el sistema ya está escalonado basta tomar $z = \lambda$ y $t = \mu$ y despejar en cascada.

$$\begin{cases}x=-\lambda+2\mu\\y=\lambda-4\mu\\z=\lambda\\t=\mu\end{cases} \leftrightarrow \quad V=\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-4\\0\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$

Cometario: Conviene comprobar que, efectivamente, los vectores generadores de V son ortogonales a los vectores dados en el enunciado.

Si llamamos U al espacio generado por los vectores que nos dan en el enunciado

$$U=\left\langle \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

El espacio *V*, que acabamos de calcular es

$$V = U^{\perp}$$

Por consiguiente,

$$V^{\perp} = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$$

Para hallar la forma implícita de $V^{\perp}$ hay que eliminar parámetros en la expresión

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots\ldots.. \leftrightarrow \ldots\ldots \begin{cases} x = 2\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -\lambda + \mu \\ t = 4\lambda \end{cases}$$

Comentario: Para eliminar parámetros se pueden utilizar varios procedimientos: sustitución, igualación, eliminación.

Utilizando el método de eliminación de Gauss, tenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2y - x & 2z - x & 2t \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2x + 2y + 2z & 4x - 8y + 2t \end{pmatrix}$$

Con los cual, para que el rango de la matriz sea igual a 2, tiene que ocurrir

$$\begin{cases} -x + y + z = 0 \\ 2x - 4y + t = 0 \end{cases}$$

Comentario: Se puede comprobar que, en efecto, los vectores generadores de *U*, verifican estas ecuaciones.

Comentario: Obsérvese que los coeficientes de las ecuaciones implícitas de *U* son los vectores que generan $V = U^{\perp}$.
Obsérvese que los coeficientes de las ecuaciones implícitas de *V* son los vectores que generan $U = V^{\perp}$