Febrero 2020 B Ejercicio 5

> **Ejercicio 5** Hallar la proyección del vector $(1,1,1)$ sobre el plano
> $$2x + y - z = 0.$$

<u>Respuesta:</u>

<u>Método 1. Utilizando el Método de ortogonalización de Gram-Schmidt</u>

Buscamos una base del plano $U \equiv 2x + y - z = 0$

Para ello, podemos hacerlo "a ojo" buscando dos vectores linealmente independientes que verifiquen la ecuación de U. Una buena estrategia es hacer 0 una de las variables y 1 otra de ellas. Así se obtiene, por ejemplo,

$$U = \left\langle \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Como se puede comprobar, efectuando el producto escalar de estos vectores, resulta que $\left\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\right\}$ no forman una base ortogonal.

Utilizamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt para conseguir una base ortogonal, $\left\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\right\}$ de *U*.

$$\vec{e}_1 = \overline{u}_1 \qquad\qquad \vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{u_2 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1}\vec{e}_1$$

Operando resulta

$$\vec{e}_1 = \overline{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{u_2 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De modo que

$$U = \left\langle \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario: Comprobamos que, en efecto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ son dos vectores que verifican la ecuación que determina U y que su producto escalar es cero.

La proyección del vector $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sobre el plano U viene dado por la expresión

$$\mathrm{Proy}_U(\vec{v}) = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2$$

siendo,

$$c_1 = \frac{\vec{v} \bullet \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{2}{2} = 1$$

$$c_2 = \frac{\vec{v} \bullet \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{3}$$

Así pues,

$$\mathrm{Proy}_U\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = 1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Método 2. Utilizando la descomposición $E = U \oplus U^{\perp}$

Recordatorio

Se define el espacio ortogonal de *U*, que se representa $U^{\perp}$,

$$U^{\perp} = \left\{ \vec{x} \in E \text{ tal que } \vec{x} \bullet \vec{u} = 0, \text{ para todo } \vec{u} \in U \right\}$$

Un subespacio y su subesespacio ortogonal son dos subespacios suplementarios

$$E = U \oplus U^{\perp}$$

Lo que significa que cualquier vector $\vec{x} \in E$ se descompone de manera única como suma de dos vectores, uno $\overrightarrow{u_0} \in U$ y otro de $\overrightarrow{w_0} \in U^{\perp}$

$$\vec{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{w_0}$$

El vector $\vec{u}_0 \in U$ se dice que es la proyección de $\vec{x}$ sobre *U*.
El vector $\overrightarrow{v_0} \in U^{\perp}$ se dice que es la proyección de $\vec{x}$ sobre $U^{\perp}$

Empezamos por hallar $U^{\perp}$

$$U^{\perp} = \left\{ \vec{x} \in R^3 \text{ tal que } \begin{cases} \vec{x} \bullet \vec{u}_1 \\ \vec{x} \bullet \vec{u}_2 \end{cases} \right\}$$

Esta relación nos conduce a las ecuaciones

$$U^{\perp} \equiv \begin{cases} y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

La solución general del sistema dependerá de un parámetro, por ejemplo $z = t$

De modo que,

$$U^{\perp} \equiv \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario: Se puede comprobar que este vector es ortogonal a los dos vectores que forman una base de *U*

Dado la descomposición $E = U \oplus U^{\perp}$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \alpha\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{U} + \underbrace{\gamma\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{U\perp}$$

Este es un sistema de ecuaciones que permite determinar los valores de α, β y γ

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -2 & 1\\1 & 0 & -1 & 1\\1 & 2 & 1 & 1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\1 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\0 & -2 & -2 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & -3 & 1\end{array}\right)$$

$$\gamma = -\frac{1}{3} \qquad \beta = \frac{1}{3} \qquad \alpha = \frac{2}{3}$$

De este modo resulta que

$$\mathrm{Proy}_U\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}$$