Ejemplo de aplicación del método de ortogonalización de GRAM-SCHMIDT

Consideremos el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(x)$ de los polinomios de grado menor o igual que dos definidos de en el intervalo [-1, 1].

En este espacio vectorial consideramos la base canónica

$$B = \{\ \overrightarrow{u_1} = 1, \quad \overrightarrow{u_2} = x, \quad \overrightarrow{u_3} = x^2\ \}$$

En este espacio vectorial consideramos el producto escalar

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x) dx$$

Comentario: Con este producto escalar, la base canónica no es ortiogonal.

1) Calcular la *matriz de Gram* de este producto escalar referido a la base *B*

Teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\ dx = 2$$

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\ dx = 0$$

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_3} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\ dx = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = \int_{-1}^{1} x \cdot x\ dx = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_3} = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\ dx = 0$$

$$\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{u_3} = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 dx = \frac{2}{5}$$

Resulta que la *matriz de Gram* pedida es

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

2) Aplicar el *método de ortogonalización de Gram-Schmidt* para hallar una base ortogonal de $\mathcal{P}_2(x)$ a partir de la base *B*.

- Cálculo de $\overrightarrow{e_1}$

$$\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{u_1} = 1$$

- Cálculo de $\overrightarrow{e_2}$

$$\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{u_2} - \frac{\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}} \overrightarrow{e_1}$$

Teniendo en cuenta que

$\overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} x \cdot 1 \, dx = 0$=

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2$$

Se tiene que

$$\overrightarrow{e_2} = x - \frac{0}{2} 1$$

$$\overrightarrow{e_2} = x$$

- Cálculo de $\overrightarrow{e_3}$

$$\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{u_3} - \frac{\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}} \overrightarrow{e_1} - \frac{\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}} \overrightarrow{e_2}$$

Teniendo en cuenta que

$$\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 \, dx = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1 \, dx = 2$$

$\overrightarrow{u_3} \cdot \overrightarrow{e_2} = \int_{-1}^{1} x^2 \cdot x \, dx = 0$=

$$\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = \int_{-1}^{1} x \cdot x \, dx = \frac{2}{3}$$

Se tiene que

$$\overrightarrow{e_3} = x^2 - \frac{\frac{2}{3}}{2} 1 - \frac{0}{\frac{2}{3}} x$$

$$\overrightarrow{e_3} = x^2 - \frac{1}{3}$$

A continuación, este ejemplo hecho con MAXIMA

(%i1) load(eigen);

(%o1) /usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/matrix/eigen.mac

(%i21) pe(f,g):=integrate(f·g,x,-1,1);

(%o21) $\mathrm{pe}(f,g) := \int_{-1}^{1} f\,g\,dx$

(%i22) u1:1;

(%o22) 1

(%i15) u2:x;

(%o15) x

(%i16) u3:x^2;

(%o16) x^2

(%i23) pe(u1,u1);

(%o23) 2

(%i24) pe(u1,u2);

(%o24) 0

(%i25) pe(u1,u3);

(%o25) $\frac{2}{3}$

(%i26) pe(u2,u2);

(%o26) $\frac{2}{3}$

(%i27) pe(u2,u3);

(%o27) 0

(%i28) pe(u3,u3);

(%o28) $\frac{2}{5}$

(%i29) gramschmidt([u1,u2,u3],pe);

(%o29) $\left[1, x, \frac{3x^2-1}{3}\right]$

(%i30) e1:1;

(%o30) 1

3) Consideremos el espacio vectorial $L^2[-1,1]$, de las funciones de cuadrado integrable definidas en el intervalo [-1, 1]. Hallar la proyección ortogonal de la función $f(x) = e^x$ sobre el subespacio $U = \mathcal{P}_2(x)$ con el producto escalar anterior.

Recordando que

$$PROY_U(\vec{v}) = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_2}$$

En donde

$$c_1 = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1}}$$

$$c_2 = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2}}$$

$$c_3 = \frac{\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_3}}{\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3}}$$

En nuestro caso, teniendo en cuenta que

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} 1e^x dx = e - \tfrac{1}{e} = 2{,}350402387$$

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_2} = \int_{-1}^{1} xe^x dx = 0{,}735788823$$

$$\vec{v} \cdot \overrightarrow{e_3} = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) e^x dx = 0{,}09541716017$$

$$\overrightarrow{e_1} \cdot \overrightarrow{e_1} = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$$

$$\overrightarrow{e_2} \cdot \overrightarrow{e_2} = \int_{-1}^{1} x \cdot xdx = \tfrac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{e_3} \cdot \overrightarrow{e_3} = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right)\left(x^2 - \tfrac{1}{3}\right) dx = \frac{8}{45}$$

Con lo cual,

$$c_1 = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_1}}{\overrightarrow{e_1}\cdot\overrightarrow{e_1}} = \frac{2{,}350402387}{2} = 1{,}175201194$$

$$c_2 = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_2}}{\overrightarrow{e_2}\cdot\overrightarrow{e_2}} = \frac{0{,}735788823}{\frac{2}{3}} 1{,}103638324$$

$$c_3 = \frac{\vec{v}\cdot\overrightarrow{e_3}}{\overrightarrow{e_3}\cdot\overrightarrow{e_3}} = \frac{0{,}09541716017}{\frac{8}{45}} = 0{,}536721526$$

Así resulta que la proyección ortogonal de $f(x) = e^x$ sobre $\mathcal{P}_2(x)$, el espacio de los polinomios de grado menor o igual de 2, en el intervalo [-1, 1] es

$$PROY_U(\vec{v}) = c_1\overrightarrow{e_1} + c_2\overrightarrow{e_2} + c_1\overrightarrow{e_2}$$

$$PROY_{P_2}(e^x) = 1{,}175201194 + 1{,}103683235x + 0{,}536721526\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) =$$

$$PROY_{P_2}(e^x) = 0{,}9962940183 + 1{,}103638324x + 0{,}536721526x^2$$

Este sería el polinomio de grado menor o igual que 2 que “mejor” aproxima la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [-1, 1].

A continuación seguimos con el ejemplo usando MAXIMA

```
(%i30) e1:1;
(%o30) 1

(%i31) e2:x;
(%o31) x

(%i32) e3:x^2-(1/3);
(%o32) x^2 - 1/3

(%i33) v:exp(x);
(%o33) %e^x

(%i48) fpprintprec : 10$;
pe(v,e1);
rat: replaced 0.3678794412 by 10391023/28245729 = 0.3678794412
rat: replaced 2.718281828 by 28245729/10391023 = 2.718281828
(%o48) 2.350402387

(%i49) pe(v,e2);
rat: replaced -0.7357588823 by -20782046/28245729 = -0.7357588823
(%o49) 0.7357588823

(%i50) pe(v,e3);
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced 1.716770725 by 67741129/39458460 = 1.716770725
rat: replaced 1.812187886 by 18830486/10391023 = 1.812187886
(%o50) 0.09541716017

(%i51) c1:pe(v,e1)/pe(e1,e1);
rat: replaced 0.3678794412 by 10391023/28245729 = 0.3678794412
rat: replaced 2.718281828 by 28245729/10391023 = 2.718281828
(%o51) 1.175201194

(%i52) c2:pe(v,e2)/pe(e2,e2);
rat: replaced -0.7357588823 by -20782046/28245729 = -0.7357588823
rat: replaced 0.3333333333 by 1/3 = 0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced 0.3333333333 by 1/3 = 0.3333333333
(%o52) 1.103638324
```

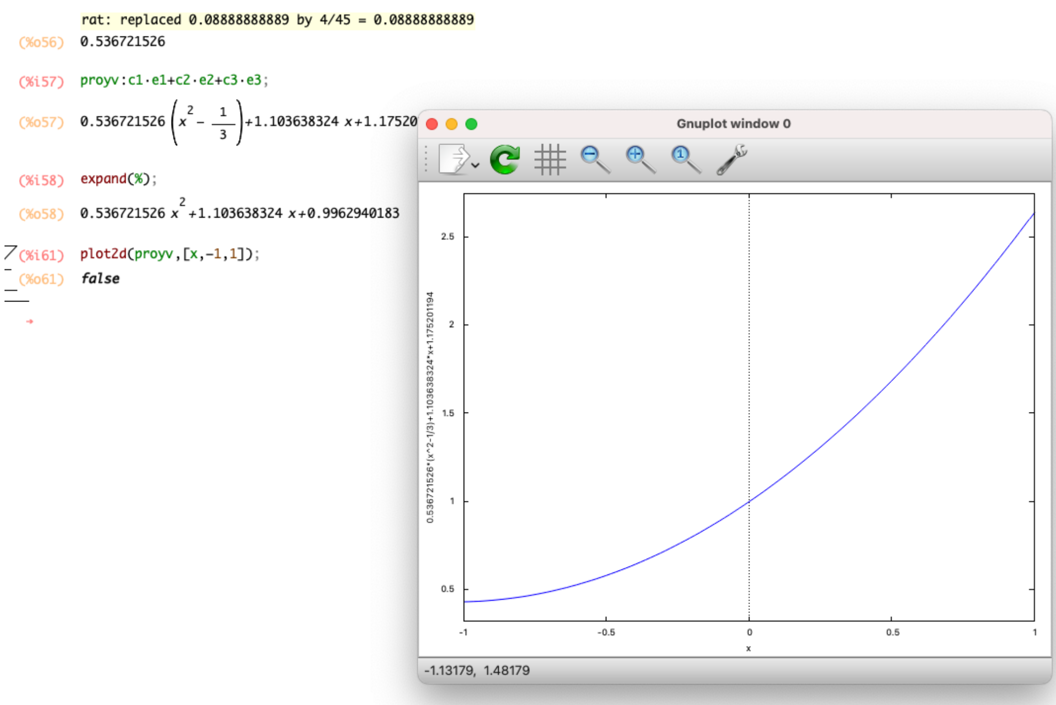
```
(%i56) c3:pe(v,e3)/pe(e3,e3);
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced 1.716770725 by 67741129/39458460 = 1.716770725
rat: replaced 1.812187886 by 18830486/10391023 = 1.812187886
rat: replaced -0.3333333333 by -1/3 = -0.3333333333
rat: replaced 0.1111111111 by 1/9 = 0.1111111111
rat: replaced -0.2222222222 by -2/9 = -0.2222222222
rat: replaced 0.2 by 1/5 = 0.2
rat: replaced -0.08888888889 by -4/45 = -0.08888888889
rat: replaced 0.08888888889 by 4/45 = 0.08888888889
(%o56) 0.536721526

(%i57) proyv:c1·e1+c2·e2+c3·e3;
```

(%o57) $0.536721526\left(x^2-\frac{1}{3}\right)+1.103638324\,x+1.175201194$

```
(%i58) expand(%);
```

(%o58) $0.536721526\,x^2+1.103638324\,x+0.9962940183$

Dibujamos la gráfica (que se muestra en una ventana aparte)



Ahora las dos gráficas juntas (el polinomio en azul y la exponencial en rojo)

```
(%i57) proyv:c1·e1+c2·e2+c3·e3;
(%o57) 0.536721526 (x^2 - 1/3)+1.103638324 x+1.17520
(%i58) expand(%);
(%o58) 0.536721526 x^2 +1.103638324 x+0.9962940183
(%i61) plot2d(proyv,[x,-1,1]);
(%o61) false
(%i62) plot2d([proyv,v],[x,-1,1]);
(%o62) false
```