Método de ortogonalización de Gram-Schmidt

(Ver página 208 del libro de teoría)

Para simplificar, usaremos como referencia un espacio vectorial de tres dimensiones.

Supongamos un espacio vectorial, *V*, y en él una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$. Nuestro objetivo es, a partir de esta base, construir otra base nueva, $B' = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, que sea ortogonal y que, además, cumpla

$$\langle \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{u}_1 \rangle$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$
$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u}_3 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \rangle$$

- Construcción de $\vec{e}_1$

Es inmediato que

$$\boxed{\vec{e}_1 = \bar{u}_1}$$

- Construcción de $\vec{e}_2$

En primer lugar, el vector, $\vec{e}_2$, que buscamos, tiene que ser combinación lineal de $\vec{u}_2$ y de $\vec{e}_1$. Por consiguiente, $\vec{e}_2$ es de la forma

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_2 + \lambda \vec{e}_1$$

Como queremos que la base *B´* sea ortogonal, determinamos el valor de λ para que se cumpla que $\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 = 0$. Es decir

$$\left(\vec{u}_2 + \lambda \vec{e}_1\right) \bullet e_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{u}_2 \bullet \vec{e}_1 + \lambda\left(e_1 \bullet e_1\right) = 0 \quad \leftrightarrow \quad \lambda = -\frac{\vec{u}_2 \bullet \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1}$$

En definitiva,

$$\boxed{\vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{u_2 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1} \vec{e}_1}$$

- <u>Construcción de $\vec{e}_3$</u>

En primer lugar, el vector, $\vec{e}_3$, que buscamos, tiene que ser combinación lineal de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{u}_3\}$. Por consiguiente, $\vec{e}_3$ es de la forma

$$\vec{e}_3 = \vec{u}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2$$

Como queremos que la base *B´* sea ortogonal, determinamos el valor de α y el valor de β para que se cumpla que $\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 = 0$ y que $\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 = 0$.

La primera condición, $\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 = 0$, nos permite determinar α

$$\left(\vec{u}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2\right) \bullet \vec{e}_1 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{u}_3 \bullet \vec{e}_1 + \alpha\left(\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1\right) + \beta\left(\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1\right) = 0$$

Teniendo en cuenta que $\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 = 0$, despejando α, resulta

$$\alpha = -\frac{\vec{u}_3 \bullet \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1}$$

La segunda condición, $\vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 = 0$, nos permite determinar β

$$\left(\vec{u}_3 + \alpha\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2\right) \bullet e_2 = 0 \quad \leftrightarrow \quad \vec{u}_3 \bullet \vec{e}_2 + \alpha\left(e_1 \bullet e_2\right) + \beta\left(e_2 \bullet e_2\right) = 0$$

Teniendo en cuenta que $\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 = 0$, despejando β

$$\beta = -\frac{\vec{u}_3 \bullet \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2}$$

En definitiva, sustituyendo α y β por los valores que acabamos de hallar

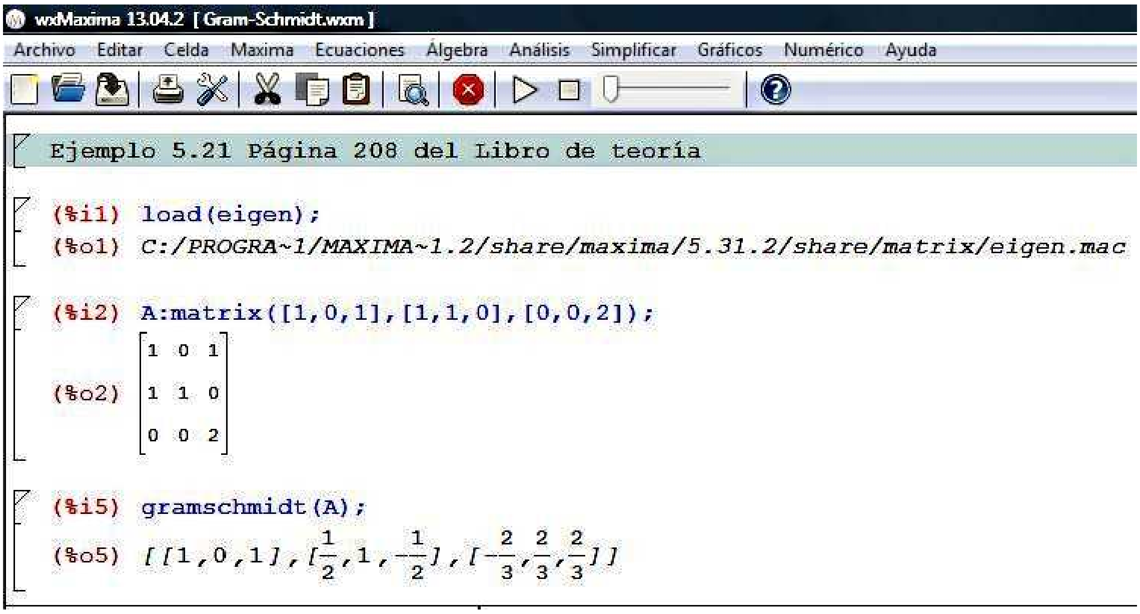
$$\boxed{\vec{e}_3 = \vec{u}_3 - \frac{\vec{u}_3 \bullet \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1}\vec{e}_1 - \frac{\vec{u}_3 \bullet \vec{e}_2}{\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2}\vec{e}_2}$$

Como se puede observar, el método que hemos desarrollado es constructivo. Para dimensiones mayores que tres la regla de formación se puede generalizar fácilmente

$$\boxed{\vec{e}_p = \vec{u}_p - \frac{\vec{u}_p \bullet \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1}\vec{e}_1 - \frac{u_p \bullet e_2}{\vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2}e_2 \ldots - \frac{\vec{u}_p \bullet \vec{e}_{p-1}}{\vec{e}_{p-1} \bullet \vec{e}_{p-1}}\vec{e}_{p-1}}$$

A partir de esta base ortogonal, se puede conseguir una base *ortonormal*, simplemente normalizando los vectores de la base.

$$\vec{e}\,'_i = \frac{\bar{e}_i}{\left\| \vec{e}_i \right\|}$$



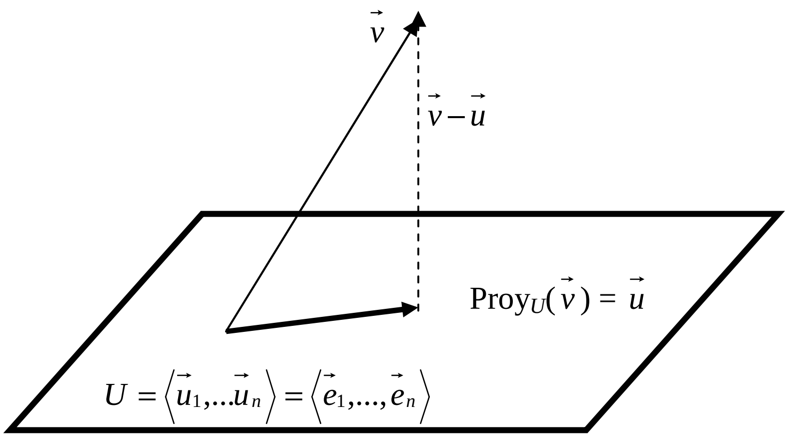
A continuación veremos dos aplicaciones del método de ortogonalización de Gram-Schmidt

1) Para hallar la proyección ortogonal

2) Para hacer la factorización *QR*.

Proyección ortogonal de un vector $\vec{v}$ sobre un subespacio *U*

(Ver página 210 del libro de teoría)



Buscamos el vector $\vec{u} \in U$ que es la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre *U*. ¿Cómo hacer?

1º) Se construye una base ortogonal de *U* utilizando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

$$\{\vec{u}_1,\ldots,\vec{u}_n\} \xrightarrow{Gram-Schmidt} \{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$$

2º) De este modo se puede expresar el vector buscado, $\vec{u}$, como una combinación lineal de una base ortogonal

$$\boxed{\text{Proy}_U(\vec{v}) = \vec{u} = c_1\vec{e}_1 + \ldots + c_n\vec{e}_n}$$

En donde los coeficientes, c_i, tiene este valor

$$\boxed{c_i = \frac{\vec{v} \bullet \vec{e}_i}{\vec{e}_i \bullet \vec{e}_i}}$$

La demostración de esto, se obtiene del hecho de que el vector $(\vec{v}-\vec{u})$ es ortogonal a todos los vetores de *U*. En particular, valen cero los productos escalares de $(\vec{v}-\vec{u})$ por cada uno de los elementos, $\vec{e}_i$, de la base ortogonal de *U*.

$$(\vec{v}-\vec{u}) \bullet \vec{e}_i = v \bullet e_i - u \bullet e_i = 0 \quad \leftrightarrow \quad v \bullet e_i = u \bullet e_i$$

Si en la expresión anterior sustituimos $\vec{u}$ por su desarrollo, $\vec{u} = c_1\vec{e}_1 + ... + c_n\vec{e}_n$, resulta

$$v \bullet e_i = \left(c_1\vec{e}_1 + ... + c_n\vec{e}_n\right) \bullet \vec{e}_i$$

Teniendo en cuenta que la base $B' = \left\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\right\}$ es una base ortogonal y que $\vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = 0$ cuando $i \neq j$, al desarrollar el paréntesis del segundo miembro se anulan todos los términos menos uno.

$$v \bullet e_i = c_i\left(\vec{e}_i \bullet \vec{e}_i\right)$$

Despejando el coeficiente c_i, se obtiene lo que queríamos demostrar

$$c_i = \frac{\vec{v} \bullet \vec{e}_i}{\vec{e}_i \bullet \vec{e}_i}$$

Cometario: Estos coeficientes se llaman “Coeficientes de Fourier”.

Factorizacion *QR*

Dada una matriz, A, la factorización

$$A = QR$$

consiste en lo siguiente:

Q es la matriz ortonormal que se obtiene aplicando el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de la matriz A.

Las columnas de la matriz Q forman una base ortonormal. Por tanto, $Q^tQ = I$.

La matriz R es una matriz triangular superior, con elementos positivos en la diagonal.

$$R = Q^tA$$

RECORDATORIO

Proyección ortogonal

Supongamos que estamos en un espacio euclídeo, *E*. Sea $U \subset E$ un subespacio vectorial.
Se define el espacio ortogonal de *U*, que se representa $U^{\perp}$,

$$U^{\perp} = \left\{ \vec{x} \in E \text{ tal que } \vec{x} \bullet \vec{u} = 0, \text{ para todo } \vec{u} \in U \right\}$$

Algunas propiedades de los espacios otogonales son:

1) Un subespacio y su subesespacio ortogonal son dos subespacios suplementarios

$$E = U \oplus U^{\perp}$$

Lo que significa que cualquier vector $\vec{x} \in E$ se descompone de manera única como suma de dos vectores, uno $\overrightarrow{u_0} \in U$ y otro de $\overrightarrow{w_0} \in U^{\perp}$

$$\vec{x} = \overrightarrow{u_0} + \overrightarrow{w_0}$$

El vector $\vec{u}_0 \in U$ se dice que es la proyección de $\vec{x}$ sobre *U*.
El vector $\overrightarrow{v_0} \in U^{\perp}$ se dice que es la proyección de $\vec{x}$ sobre $U^{\perp}$

2) $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = U$

3) La proyección $\vec{u}_0 \in U$ de un vector $\vec{x}$ sobre *U* es el vector de *U* que está a una distancia menor de $\vec{x}$. Es decir,

$$\left\| \vec{x} - \overrightarrow{u_0} \right\| \leq \left\| \vec{x} - \vec{u} \right\| \qquad \text{Para todo } \vec{u} \in U$$

La demostración de esta propiedad es una consecuencia del teorema de Pitágoras
Teorema de Pitágoras: Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores ortogonales, entonces

$$\left\| \vec{a} + \vec{b} \right\|^2 = \left\| \vec{a} \right\|^2 + \left\| \vec{b} \right\|^2$$

Demostración del teorema de Pitágoras:
Basta tener en cuenta que

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \left(\vec{a} \bullet \vec{a}\right) + \left(\vec{b} \bullet \vec{b}\right) + 2\left(\vec{a} \bullet \vec{b}\right)$$

Como los vectores $\vec{a} = \left(\vec{x} - \bar{u}_0\right)$ y $\vec{b} = \left(\vec{u}_0 - \vec{u}\right)$ son perpendiculares, por el teorema de Pitágoras

$$\left\| x - u \right\|^2 = \left\| x - u_0 \right\|^2 + \left\| u_0 - u \right\|^2 \geq \left\| x - u_0 \right\|^2$$