Febrero B 2023 Ejercicio 5

5. (1 PUNTO) Estudiar si la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4) = 10x_1y_1 - x_2y_2 - 7x_3y_4 - 7x_4y_3 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

define o no un producto escalar en $\mathbb{R}^4$.

Respuesta

Supongamos que la expresión se tratase de un producto escalar. Intentemos escribir la correspondiente Matriz de Gram respecto de la base canónica.

$$(1,0,0,0) \cdot (1,0,0,0) = 10$$
$$(1,0,0,0) \cdot (0,1,0,0) = 0$$
$$(1,0,0,0) \cdot (0,0,1,0) = 0$$
$$(1,0,0,0) \cdot (0,0,0,1) = 0$$

$$(0,1,0,0) \cdot (1,0,0,0) = 0$$
$$(0,1,0,0) \cdot (0,1,0,0) = -1$$
$$(0,1,0,0) \cdot (0,0,1,0) = 0$$
$$(0,1,0,0) \cdot (0,0,0,1) = 0$$

$$(0,0,1,0) \cdot (1,0,0,0) = 0$$
$$(0,0,1,0) \cdot (0,1,0,0) = 0$$
$$(0,0,1,0) \cdot (0,0,1,0) = 1$$
$$(0,0,1,0) \cdot (0,0,0,1) = -7$$

$$(0,0,0,1) \cdot (1,0,0,0) = 0$$
$$(0,0,0,1) \cdot (0,1,0,0) = 0$$
$$(0,0,0,1) \cdot (0,0,1,0) = -7$$
$$(0,0,0,1) \cdot (0,0,0,1) = 2$$

De este modo escribiremos la expresión (forma bilineal) de la derecha en notación matricial

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Si observamos que las matrices de Gram tienen que cumplir necesariamente las propiedades:

1) Son simétricas. (Ya que el producto escalar es simétrico)
2) Los términos de la diagonal son positivos. (Ya que el producto escalar de un vector por sí mismo es una cantidad positiva).
3) Son formas cuadráticas definidas positivas.

Según podemos apreciar hay algunas propiedades del producto escalar que **NO** se cumplen. Por ejemplo,

$$(0,1,0,0)\cdot(0,1,0,0) = -1$$

Comentario:

Definición

Una operación

$$\bullet : V \times V \to R$$

se dice que es un *producto escalar,* si $\forall \vec{u},\vec{v},\vec{w} \in V$ y $\forall \lambda \in R$, se verifican las propiedades:

1. $\vec{u}\bullet\vec{v} = \vec{v}\bullet\vec{u}$
2. $(\overrightarrow{\lambda u})\bullet\vec{v} = \lambda(\vec{u}\bullet\vec{v})$
3. $(\vec{u}+\vec{v})\bullet\vec{w} = \vec{u}\bullet\vec{w}+\vec{v}\bullet\vec{w}$
4. $\vec{u}\bullet\vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u}\bullet\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Un espacio vectorial con producto escalar definido sobre él se llama ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

Expresión analítica del producto escalar

Comentario: Por centrar ideas, consideraremos el espacio vectorial R^3

Consideremos una base del espacio, $B = \{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}$, de tal manera que se identifican los vectores con sus coordenadas

Si

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3} \qquad \vec{y} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + y_3\vec{e_3}$$

Por las propiedades de linealidad del producto escalar, la expresión analítica del producto escalar es

$$\vec{x}\bullet\vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{e_1}\bullet\vec{e_1} & \vec{e_1}\bullet\vec{e_2} & \vec{e_1}\bullet\vec{e_3} \\ \vec{e_2}\bullet\vec{e_1} & \vec{e_2}\bullet\vec{e_2} & \vec{e_2}\bullet\vec{e_3} \\ \vec{e_3}\bullet\vec{e_1} & \vec{e_3}\bullet\vec{e_2} & \vec{e_3}\bullet\vec{e_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $G = \begin{pmatrix} \vec{e_1} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_2} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_3} \end{pmatrix} = \left(g_{ij}\right)$ se llama *matriz de Gram*

Cometario: La matriz de Gram es simétrica, los elementos de la diagonal son positivos, y es definida positiva

Usando la notación matricial

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = X^T G Y$$