Septiembre 2022 Ejercicio 5

> **Ejercicio 5** Sabiendo que $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ donde hay definido un producto escalar cuya matriz de Gram tiene por filas $(1, \frac{3}{2})$ y $(\frac{3}{2}, 10)$, hallar la norma de $\bar{u}_1 - \bar{u}_2$.

En un Espacio Euclídeo (Espacio vectorial que tiene definido un producto escalar) dada una base, la expresión analítica tiene del producto escalar viene definida por la *matriz de Gram.* De modo que

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = X^t G Y$$

En nuestro caso,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, \quad x_2) \begin{pmatrix} \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} & \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Según lo que se dice en el enunciado

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

O sea, en nuestro caso, conociendo la matriz de Gram, podemos decir que

$$\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} = 1; \qquad \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} = \frac{3}{2}; \qquad \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2} = 10$$

Comentario: En los espacios Euclídeos, a partir del *producto escalar*, se puede definir

NORMA: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$

DISTANCIA: $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$

En nuestro problema se está pidiendo calcular la distancia entre los vectores de la base.

$$d(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) = \|\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})} =$$

$$\sqrt{\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \cdot \overrightarrow{u_2}} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + 10} = \sqrt{8}$$

Comentario:

Este problema también se puede hacer teniendo en cuenta que, referido a la base $\{u_1, \quad u_2\}$, las coordenadas de los vectores de la base son

$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\qquad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Por tanto, como $u_1 - u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\|\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}\| = \sqrt{(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2}) \cdot (\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2})} = \sqrt{(1, \quad -1) \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{8}$$