Febrero 2018 B Ejercicio 5

Ejercicio 5 Defina transformación ortogonal y enuncie un ejemplo en $\mathbb{R}^2$

Ver la página 214 del Libro de teoría y siguientes

Se considera que el producto escalar de R^n es el estandar de modo que $X \bullet Y = X^T Y$

Definición:
Una transformación lineal T: $R^n \rightarrow R^n$ se dice que es *ortogonal* si conserva el producto escalar. Es decir, para todo par de vectores, **x**, **y** de R^n, se verifica que

$$T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$$

Algunas propiedades de las transformaciones ortogonales, que se derivan directamente de la definición, son:

a) La transformación T conserva, la norma, la distancia y los ángulos.
b) La transformación T transforma bases ortonormales en bases ortonormales.

Comentario: Por ejemplo, en el plano son transformaciones lineales que conservan distancias y ángulos: las simetrías respecto un eje que pasa por el origen, los giros de centro en el origen, las simetrías respecto del origen (Caso particular de un giro. Una simetría respecto a un punto es un giro de π radianes).
Hay transformaciones que conservan distancias y ángulos que no son lineales, como por ejemplo las transformaciones y las simetrías respecto de ejes que no pasan por el oriben y giros que no tienen su centro en el origen).

<u>Desde un punto de vista analítico</u>,

La matriz A de una transformación *ortogonal* se caracteriza por la propiedad

$$A\, A^T = I_n$$

A este tipo de matrices se las llama *matrices ortogonales.*

Comentario: $AA^T = I_n$ es equivalente a decir que $A^{-1} = A^T$

Demostración

Sea A la matriz de una transformación ortogonal T, entonces

$$X \bullet Y = (AX) \bullet (AY) = X^T A^T AY = X^T (A^T A) Y$$

Para todo X, Y, de donde $A \cdot A^T = I_n$

Recíprocamente, si $A^{-1} = A^T$ resulta que

$$T(\mathbf{x}) \cdot T(\mathbf{y}) = (AX) \bullet (AY) = X^T A^T AY = X^T (A^T A) Y = X \bullet Y$$

Comentario: Como det(A) = det (A^T), Si A es una matriz ortogonal,

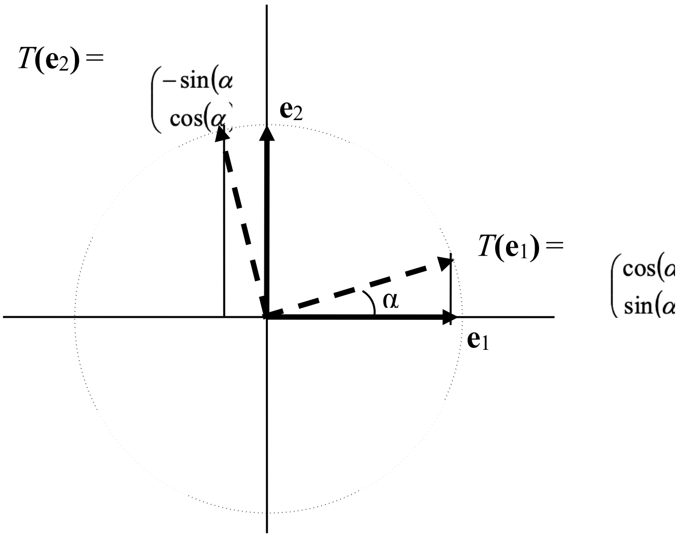
$$\det(A\cdot A^T) = \det(A)\cdot\det(A^T) = \det(A)^2 = \det(I) = 1$$

Por consiguiente, det(A) = +1 o bien es det(A) = –1.

Cuando det(A) = +1 se dice que *T conserva la orientación* y cuando det(A) = –1 se dice que *T no conserva la orientación*.

En R^2, las transformaciones ortogonales pueden ser giros (que conservan la orientación) o simetrías axiales, que no conservan la orientación

Giros:



Respecto de la base canónica $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ las ecuaciones que nos dan las coordenadas del vector transformado en función de las coordenadas del vector es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

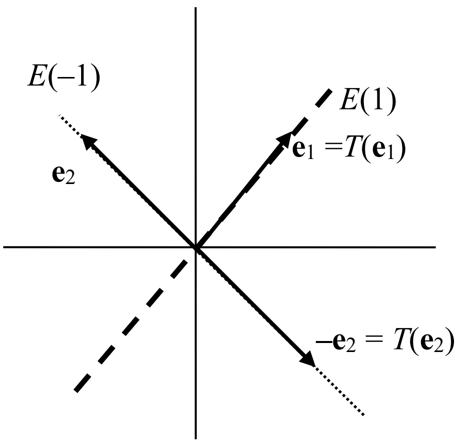
Comentario: Una aplicación lineal está determinada si se conocen los transformados de una base. En la expresión analítica de una aplicación lineal, las columnas de la matriz asociada a la aplicación son las coordenadas de los transformados de la base.

Comentario: Un giro de ángulo α = 0 es la identidad $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Un giro de ángulo α = π es una simetría respecto del origen de coordenadas

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

En una simetría axial, elegiendo la base de los autovectores $B' = \{ \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$



Resulta que la expresión matricial de la transformación T, es una matriz diagonal, en la que los términos de la diagonal son los autovalores. Ya que

$T(\mathbf{e}_1) = 1\mathbf{e}_1$

$T(\mathbf{e}_2) = (-1)\mathbf{e}_2$

Así pues, respecto de la base B' la matriz asociada a T es

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comentario: Vamos a hacer un análisis para ver cuál es la forma general de una transformación ortogonal de R^2

Si la transformación ortogonal T es de matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Como $A^T = A^{-1}$,

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{d}{\det(A)} \\ c = \dfrac{-b}{\det(A)} \end{cases}$$

Distinguimos dos casos.

1) Cuando $\det(A) = +1$ (se conserva la orientación)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

Por tanto, existe un ángulo α tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

que es un giro de centro O y ángulo α

2) Cuando det(A) = –1 (no se conserva la orientación)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1$$

Por tanto, existe un ángulo α tal que

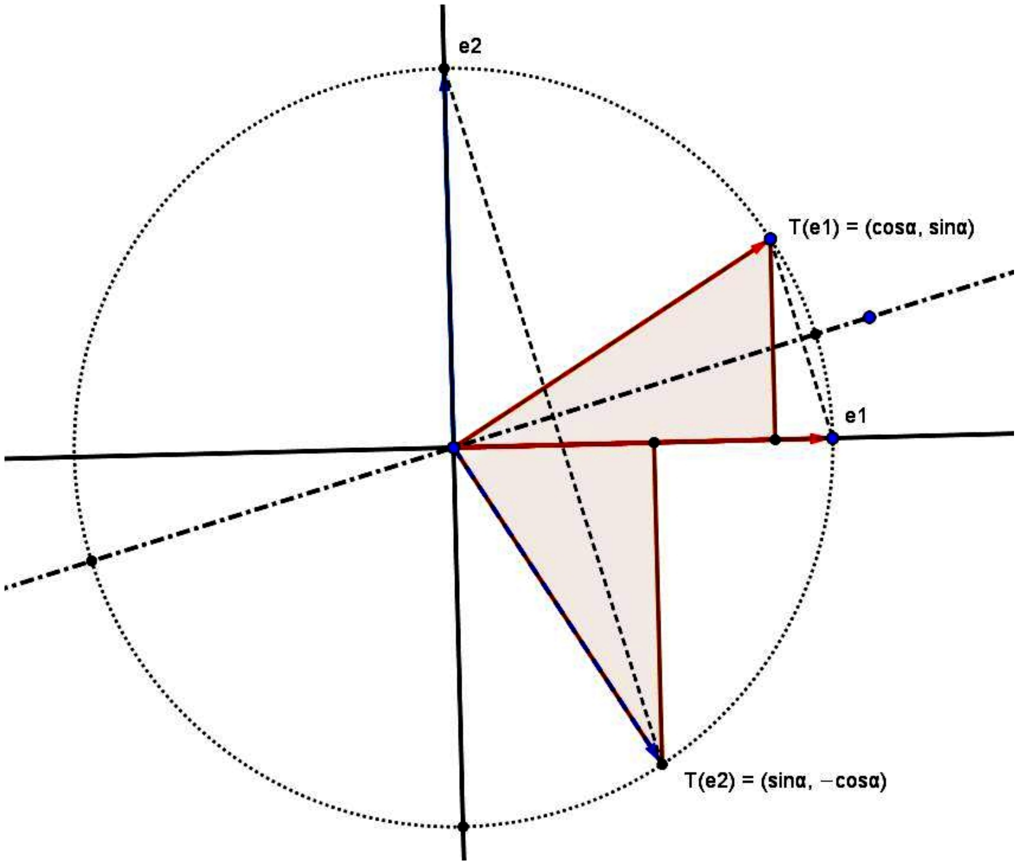
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

Esta matriz representa una simetría axial de eje $y = \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

En este caso, el polinomio característico de A es

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1$$

y A tiene dos autovalores $\lambda = +1$ y $\lambda = -1$.


e2
T(e1) = (cosα, sinα)
e1
T(e2) = (sinα, −cosα)