Febrero 2023 A Ejercicio 5

5. (1 PUNTO) Calcule la matriz de Gram respecto de la base canónica del producto escalar definido en $\mathbb{R}^3$ por

$$(x_1, x_2, x_3) \bullet (y_1, y_2, y_3) = 8x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2 + 9x_3y_3.$$

Respuesta

Calcularemos los productos escalares de los elementos de la base

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = (1,0,0) \cdot (1,0,0) = 8$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = (1,0,0) \cdot (0,1,0) = -3$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = (1,0,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = (0,1,0) \cdot (1,0,0) = -3$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = (0,1,0) \cdot (0,1,0) = 5$$
$$\vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = (0,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$$

$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = (0,0,1) \cdot (1,0,0) = 0$$
$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 = (0,0,1) \cdot (0,1,0) = 0$$
$$\vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = (0,0,1) \cdot (0,0,1) = 9$$

De modo que la matriz de Gram es

$$G = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Comentario

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e_1} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_2} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $G = \begin{pmatrix} \vec{e_1} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_1} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_2} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_2} \bullet \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \bullet \vec{e_1} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_2} & \vec{e_3} \bullet \vec{e_3} \end{pmatrix} = (g_{ij})$ se llama *matriz de Gram*

Comentario: Comprobamos que la matriz de Gram cumple:

1) es simétrica
2) Los elementos de la diagonal son positivos
3) es una forma definida positiva

```
(%i1) eigenvalues(matrix([8,-3,0],[-3,5,0],[0,0,9]));
```

(%o1) $\left[\left[-\frac{3\sqrt{5}-13}{2}, \frac{3\sqrt{5}+13}{2}, 9\right], [1, 1, 1]\right]$

```
(%i2) float(%), numer;
```

(%o2) $[[3.145898033750315, 9.854101966249685, 9.0], [1.0, 1.0, 1.0]]$