Febrero 2023 A Problema 8

8. (2 PUNTOS) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. El sistema $AX = B$ es incompatible. Aplique el método de mínimos cuadrados para obtener el $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ que hace mínima la distancia de AX a B.

Respuesta

El sistema $AX = B$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(Este sistema no tiene solución)

Escribiendo el sistema de otra manera lo que es lo mismo

$$x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

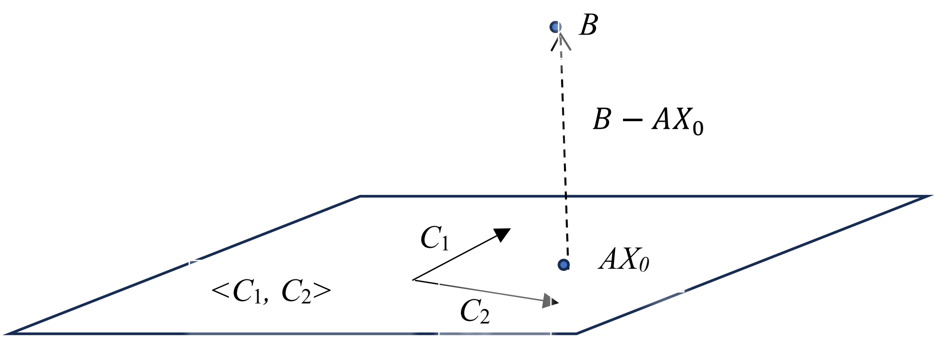
Todos los vectores del primer miembro, AX, son el espacio generado por los vectores columna de la matriz A

$$\langle C_1, C_2 \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Como no podemos resolver el sistema $AX = B$, buscamos un vector $AX_0 \in \langle C_1, C_2 \rangle$ que mejor aproxime el vector B. Es decir

$$x_{01} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_{02} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Es decir, buscamos un vector $AX_0 \in \langle C_1, C_2 \rangle$, que haga mínima la distancia a B



Esta distancia mínima se obtiene haciendo la proyección ortogonal de B sobre $\langle C_1, C_2\rangle$

Tenemos que buscar un vector X0 tal que

$$C_1 \cdot (B - AX_0) = 0 \leftrightarrow {C_1}^t(B - AX_0) = 0$$

$$C_2 \cdot (B - AX_0) = 0 \leftrightarrow {C_2}^t(B - AX_0) = 0$$

Ambas ecuaciones se pueden escribir

$$A^t(B - AX_0) = 0$$

$$A^tB - A^tAX_0 = 0$$

$$A^tAX_0 = A^tB$$

Estas últimas ecuaciones, se conocen como *Ecuaciones normales*.

En nuestro caso, teniendo en cuenta que

$$A^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^tB = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

las ecuaciones normales son

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por consiguiente, el vector X_0 que buscamos es la solución de este sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se resuelve fácilmente y resulta

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 5 & 6 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 0 & 11 & -11 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Comentario: Ser podrían utilizar cualquier otro método como la Regla de Cramer

Así resulta que $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.