Ejercicio

Hallar el subespacio complementario ortogonal, $V^{\perp}$, del subespacio, V, de $\mathbb{R}^4$, dado por las ecuaciones

$$V \equiv \begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + y - z + 3t = 0 \end{cases}$$

Respuesta

Comentario: El subespacio V tiene dimensión 2.

Si describimos el espacio V como

$$V \equiv \begin{cases} (x, y, z, t) \cdot (1, 1, -1, 1) = 0 \\ (x, y, z, t) \cdot (2, 1, -1, 3) = 0 \end{cases}$$

Podemos afirmar que los vectores $(x, y, z, t) \in V$ son ortogonales al espacio

$$M \equiv \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

Es decir,

$$V = M^{\perp}$$

Pero como el ortogonal del ortogonal de un subespacio es el propio subespacio

$$V^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp} = M$$

Así pues,

$$V^{\perp} \equiv \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \rangle$$

DE OTRA MANERA

Escribimos el subespacio *V* en forma paramétrica

$$V \equiv \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ 2x+y-z+3t=0 \end{cases}$$

Vamos a expresarlo en forma paramétrica para hallar un sistema de generadores de *V*. Para ello se reduce a forma escalonada

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \approx \begin{cases} x+y-z+t=0 \\ -y+z+t=0 \end{cases} \sim$$

$$\begin{cases} x+y=z-t \\ y=z+t= \end{cases} \sim \begin{cases} x=\lambda-\mu-(\lambda+\mu)=-2\mu \\ y=\lambda+\mu \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual

$$V \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Las ecuaciones implícitas de $V^{\perp}$ con

$$V^{\perp} \equiv \begin{cases} (x,y,z,t)\cdot(0,1,1,0)=0 \\ (x,y,z,t)\cdot(-2,1,0,1)=0 \end{cases} \approx \begin{cases} y+z=0 \\ -2x+y+t=0 \end{cases}$$

Para hallar la forma paramétrica de este subespacio hallamos la solución general de este sistema

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{2}\mu-\dfrac{1}{2}\lambda \\ y=-\lambda \\ z=\lambda \\ t=\mu \end{cases} \sim \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Con lo cual

$$V^{\perp} \equiv \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Comentario:
Podemos comprobar que los vectores de una base de *V* son ortogonales a una base de $V^{\perp}$

$(0,1,1,0)\cdot(-1,-2,2,0)=0;\ (0,1,1,0)\cdot(-1,0,0,2)=0$

$(-2\,,1,0,1)\cdot(-1,-2,2,0)=0;\ (-2,1,0,1)\cdot(-1,0,0,2)=0$