Febrero 2020 B Problema

$\boxed{\textbf{Problema}}$ Se pide:

a) (1.5 ptos.) Hallar la factorización QR de la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) (1.5 ptos.) Resolver el siguiente problema de mínimos cuadrados $AX = B$ siendo A la matriz del apartado a) y

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta

Apartado a)

<u>Factorizacion *QR*</u>

Dada una, A, la factorización

$$A = QR$$

consiste en lo siguiente:

Q es la matriz ortonormal que se obtiene aplicando el proceso de Gram-Schmidt a las columnas de la matriz A.

Las columnas de la matriz Q forman una base ortonormal. Por tanto, $Q^tQ = I$.

La matriz R es una matriz triangular superior, con elementos positivos en la diagonal.

$$R = Q^tA$$

1) CONSTRUCCIÓN DE *Q*

Se aplica el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los vectores columnas de la matriz *A*

$$\begin{cases} \overline{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \\ \overline{u}_2 = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right) \end{cases}$$

Para obtener una nueva base ortogonal $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de modo que

$$\langle \vec{e}_1 \rangle = \langle \vec{u}_1 \rangle$$
$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = \langle \vec{e}_1, \vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle$$

Hay que tomar:

$$\vec{e}_1 = \overline{u}_1$$

$$\vec{e}_2 = \vec{u}_2 - \frac{u_2 \bullet e_1}{e_1 \bullet e_1} \vec{e}_1$$

Sustituyendo los valores dados en el enunciado del ejercicio, resulta que

$$e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\vec{e}_2 = \left(\sqrt{2}, 0, 0\right) - \frac{\left(\sqrt{2}, 0, 0\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Como ambor vectores tienen norma igual a 1, no es necesario normalizarlos. Con lo cual

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) CONSTRUCCIÓN DE LA MATRIZ R

La matriz R es una matriz triangular superior, con elementos positivos en la diagonal.

$$R = Q^tA$$

Sustituyendo los valores, resulta

$$R = Q^t A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3) COMPROBACIÓN $A=QR$

$$QR = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$$

Apartado b)

Supongamos que el sistema que hay que resolver por el método de los mínimos cuadrados es

$$AX = B$$

Supongamos $A = QR$ es su factorización QR

Las ecuaciones normales son

$$A^tAX = A^tB \;\rightarrow\; R^tQ^tQRX = R^tQ^tB \;\rightarrow\; R^tRX = R^tQ^tB \;\rightarrow$$

$$\boxed{RX = Q^tB}$$

Sustituyendo los valores, en nuestro caso resulta que el sistema que hay que resolver usando el método de los mínimos cuadrados es

$$AX = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B$$

Comentario: Obviamente es un sistema incompatible. No se puede hallar una solución. La solución que mejor se aproxima es la que nos ofrece el método de los mínimos cuadrados.

Hay que resover la ecuación $RX = Q^t B$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Desarrollando los productos de matrices, se tiene

$$\begin{cases} x + y = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

wxMaxima 13.04.2 [no guardado*]

Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda

(%i1) `A:matrix([1/sqrt(2),sqrt(2)],[1/sqrt(2),0],[0,0]);`

(%o1) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i2) `AT:transpose(A);`

(%o2) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(%i3) `load(eigen);`

(%o3) *C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/matrix/eigen*

(%i7) `gramschmidt(AT);`

(%o7) $$[[\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0],[\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0]]$$

(%i14) `QT:matrix([1/sqrt(2),1/sqrt(2),0],[1/sqrt(2),-1/sqrt(2),0]);`

(%o14) $$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

(%i15) `R:QT.A;`

(%o15) $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(%i16) `B:matrix([1],[1],[1]);`

(%o16) $$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
(%i8) X:matrix([x],[y]);
```

(%o8) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

```
(%i9) ec:A.X=B;
```

(%o9) $\begin{bmatrix} \sqrt{2}\,y+\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{x}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

```
(%i10) R.X=QT.B;
```

(%o10) $\begin{bmatrix} y+x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

```
(%i11) solve([x+y=sqrt(2), y=0],[x,y]);
```

(%o11) $[[x=\sqrt{2},y=0]]$

```
(%i16) /*Ecuaciones normales*/
AT.A.X-AT.B;
```

(%o16) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}\,y+\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}-\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,y+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2} \end{bmatrix}$

```
(%i17) list_matrix_entries(AT.A.X-AT.B);
```

(%o17) $[\frac{\sqrt{2}\,y+\frac{x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}+\frac{x}{2}-\sqrt{2},\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\,y+\frac{x}{\sqrt{2}}\right)-\sqrt{2}]$

```
(%i18) solve(%,[x,y]);
```

(%o18) $[[x=\sqrt{2},y=0]]$