

Febrero B 2023 Ejercicio 5

5. (1 PUNTO) Estudiar si la aplicación

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (y_1, y_2, y_3, y_4) = 10x_1y_1 - x_2y_2 - 7x_3y_4 - 7x_4y_3 + x_3y_3 + 2x_4y_4$$

define o no un producto escalar en \mathbb{R}^4 .

Respuesta

Supongamos que la expresión se tratase de un producto escalar. Intentemos escribir la correspondiente Matriz de Gram respecto de la base canónica.

$$(1, 0, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = 10$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0$$

$$(1, 0, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = 0$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = -1$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 0$$

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = 0$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot (1, 0, 0, 0) = 0$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = 1$$

$$(0, 0, 1, 0) \cdot (0, 0, 0, 1) = -7$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot (1, 0, 0, 0) = 0$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot (0, 1, 0, 0) = 0$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 1, 0) = -7$$

$$(0, 0, 0, 1) \cdot (0, 0, 0, 1) = 2$$

De este modo escribiremos la expresión (forma bilineal) de la derecha en notación matricial

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Si observamos que las matrices de Gram tienen que cumplir necesariamente las propiedades:

- 1) Son simétricas. (Ya que el producto escalar es simétrico)
- 2) Los términos de la diagonal son positivos. (Ya que el producto escalar de un vector por sí mismo es una cantidad positiva).
- 3) Son formas cuadráticas definidas positivas.

Según podemos apreciar hay algunas propiedades del producto escalar que **NO** se cumplen. Por ejemplo,

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = -1$$

Comentario:

Definición

Una operación

$$\bullet : V \times V \rightarrow R$$

se dice que es un *producto escalar*, si $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ y $\forall \lambda \in R$, se verifican las propiedades:

1. $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$
2. $(\lambda \vec{u}) \bullet \vec{v} = \lambda(\vec{u} \bullet \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$
4. $\vec{u} \bullet \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Un espacio vectorial con producto escalar definido sobre él se llama ESPACIO VECTORIAL EUCLIDEO

Expresión analítica del producto escalar

Comentario: Por centrar ideas, consideraremos el espacio vectorial R^3

Consideremos una base del espacio, $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, de tal manera que se identifican los vectores con sus coordenadas

Si

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$$

Por las propiedades de linealidad del producto escalar, la expresión analítica del producto escalar es

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

La matriz $G = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_1 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_2 \bullet \vec{e}_3 \\ \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_1 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \bullet \vec{e}_3 \end{pmatrix} = (g_{ij})$ se llama *matriz de Gram*

Comentario: La matriz de Gram es simétrica, los elementos de la diagonal son positivos, y es definida positiva

Usando la notación matricial

$$\vec{x} \bullet \vec{y} = X^T G Y$$