Febrero 2019 A ejercicio 6

> **Ejercicio 6** Determinar, si es posible, los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que la ecuación
> $$1 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2\alpha x_2 = 0$$
> defina una parábola.

La cónica escrita en notación matricial

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\alpha y + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Los invariantes de esta cónica son

$$I_3 = \det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\alpha^2$$

$$I_2 = A_{00} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 + 1 = 2$$

Como $A_{00} = 0$, se trata de una cónica del tipo de la PARÁBOLA para cualquier valor de α.

Será una parábola (cónica regular) cuando $\det(A) \neq 0$.

Es decir, la cónica es una parábola cuando $\alpha \neq 0$

Cando $\alpha =$ se trata de una cónica degenerada.

Comentario: Lo que viene a continuación no se pide en el ejercicio, pero purde ser ilustrativo.

Para clasificar el caso degenerado hay que utilizar este invariante

$$A_{11} + A_{22} = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 - \alpha^2$$

En el caso degenerado, que se da cuando $\alpha = 0$, resulta que $A_{11} + A_{22} = 2$. Se trata de un par de rectas imaginarias sin intersección real.

<u>Clasificación de las cónicas utilizando invariantes</u>

<table>
<tr><td colspan="3">Cónicas
REGULARES
$\det(A) \neq 0$</td><td>Cónicas
DEGENERADAS
$\det(A) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} \neq 0$
Cónicas con centro</td><td rowspan="2">$A_{00} > 0$
ELIPSE</td><td>Real
$\mathrm{sig}(A) \neq \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td><td rowspan="2">Un par de rectas imaginarias con un punto real común</td></tr>
<tr><td>Imaginaria
$\mathrm{sig}(A) = \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{00} < 0$
HIPÉRBOLA</td><td>Un par de rectas reales que se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} = 0$</td><td colspan="2" rowspan="3">PARÁBOLA</td><td>$A_{11} + A_{22} > 0$
Par de rectas imaginarias sin intersección real</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} < 0$
Par de rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} = 0$
Par de rectas coincidentes</td></tr>
</table>

(Ver el cuadro que está en la página 286 del libro de teoría)

Otra manera de resolver este ejercicio es reduciéndola, previamente a su forma canónica.

Intentaremos hacerlo a mano. En primer lugar completamos cuadrados para eliminar el "termino cruzado".

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2\alpha y + 1 = 0$$
$$(x + y)^2 + 2\alpha y + 1 = 0$$

Haciendo el cambio

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$$

$$x'^2 + 2\alpha y' + 1 = 0$$
$$x'^2 + 2\alpha\left(y' + \tfrac{1}{2\alpha}\right) = 0$$
$$x''^2 + 2\alpha y'' = 0$$

Haciendo la traslación

$$\begin{cases} x'' = x' \\ y'' = y' + \tfrac{1}{2\alpha} \end{cases}$$

La ecuación reducida es de la forma

$$x^2 + 2\alpha y = 0$$

Está claro que si $\alpha \neq 0$, se trata de la ecuación de una parábola

$$y = -\tfrac{1}{2\alpha} x^2$$

Cuando $\alpha = 0$, la ecuación de la cónica

$$(x + y)^2 + 2\alpha y + 1 = 0$$

queda en

$$(x + y)^2 = -1$$

que no tiene soluciones reales.