Febrero 2010 A ejercicio 6

Ejercicio 6 La forma cuadrática $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz$ es: A) Definida positiva; B) Semidefinida positiva; C) Indefinida; D) Ninguna de las anteriores.

La expresión matricial de la forma cuadrática es:

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Comentario: Por comodidad, si solo deseamos clasificar la forma cuadrática, podemos estudiar $2Q$ en vez de Q, dado que tiene ambas el mismo signo.

$$2Q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 2xy + 2xz + 2yz$$

$$2\,Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Recordemos la clasificación de las formas cuadráticas

Definida positiva	$Q(\vec{x}) = X^T A X > 0\,,\quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$	rang(Q) = sig(Q) = n	$Q(x,y) = x^2 + 6y^2$
Semidefinida positiva	$Q(\vec{x}) = X^T A X \geq 0\,,\quad \forall \vec{x}$	rang(Q) = sig(Q) < n	$Q(x,y) = 3x^2$
Definida negativa	$Q(\vec{x}) = X^T A X < 0\,,\quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$	rang(Q) = n sig(Q) = 0	$Q(x,y) = -4x^2 - 5y^2$
Semidefinida negativa	$Q(\vec{x}) = X^T A X \leq 0\,,\quad \forall \vec{x}$	rang(Q) < n sig(Q) = 0	$Q(x,y) = -5y^2$
Indefinida	$\exists \vec{x_1}, \vec{x_2} :\ Q(\vec{x_1}) < 0$ y $Q(\vec{x_2}) > 0$	rang(Q) $\neq$ sig(Q) sig(Q) $\neq 0$	$Q(x,y) = 3x^2 - 5y^2$

Una de las maneras de clasificar una forma cuadrática es buscar una expresión diagonal y razonar, en base al teorema de inercia de Sylvester.

Calculamos los autovalores de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Polinomio característico:

$$p(m) = \det(A - mI) = \det\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 1 \\ 1 & 1 & 2-m \end{pmatrix} = -m^3 + 6m^2 - 9m + 4$$

Autovalores (raíces del polinomio característico) nos dan los elementos de la forma diagonal

$$-m^3 + 6m + 9m + 4 = -(m-4)(m-1)^2$$

$$m_1 = 4,\ \ m_2 = 1 \text{ y } m_3 = 1.$$

Como los tres elementos de la diagonal son positivos, resulta que la forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA. La opción A)

Otra forma de resolver este ejercicio es utilizar el criterio de Silvestre. Veamos cómo a continuación

Criterio de Silvester para clasificar formas cuadráticas

Es un criterio que permite clasificar rápidamente una forma cuadrática, sin necesidad de calcular los autovalores

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Consideremos las submatrices que se obtienen ampliando la esquina de arriba a la izquierda.

$\Delta_1 = a_{11}$ $\qquad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Criterio de Silvestre para la forma cuadrática $Q : R^3 \to R$, con matriz asociada *A*.

Definida positiva	$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$
Semidefinida positiva	$\Delta_3 = 0$, $\Delta_2 \geq 0$ $\Delta_1 \geq 0$
Definida negativa	$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$
Semidefinida negativa	$\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 = 0$

Comentario: Para recordar el significado del criterio basta pensar el caso de que la matriz *A* sea diagonal.

En nuestro caso $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Delta_1 = 2 > 0$ $\qquad \Delta_2 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 > 0$ $\qquad \Delta_3 = \det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4 > 0$

Como los determinantes de las tres submatrices son positivos, resulta que la forma cuadrática es DEFINIDA POSITIVA. Opción A)