Septiembre 2019 A ejercicio 6

Ejercicio 6 Hallar el rango de la forma cuadrática

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

La expresión matricial de la forma cuadrática Q: $R^3 \to R$

$$Q(x, y, z) = x^2 + xy + 2yz$$

Tiene la siguiente expresión matricial $Q(X) = X^T AX$

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Cuando se efectúa un cambio de base de matriz de paso P, de modo que $X = PX'$, la matriz de la forma cuadrática cambia

$$A' = P^T AP$$

Existen muchos posibles cambios de base que obtienen diferentes matrices A' diagonales. Todas estas formas diagonales mantienen invariantes el *rango* y la *signatura* (número de términos positivos en la diagonal) [Teorema de inercia de Silvestre]

El rango de la forma diagonal A' coincide con el rango de A

Así pues, vamos a calcular el rango de A hallando matrices equivalentes mediante operaciones elementales de fila

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto, ran(A) = 3.

Otra forma de resolver el problema sería diagonalizar la forma cuadrática, Q, hallando los autovalores

Polinomio característico

$$p(m) = \det(A - mI) = \det \begin{pmatrix} 1-m & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0-m & 1 \\ 0 & 1 & 0-m \end{pmatrix} = -m^3 + m^2 + \tfrac{5}{4}m - 1$$

Autovalores

$m_1 = -1{,}062$, $m_2 = 1{,}381$ y $m_3 = 0{,}681$

Los tres autovalores son distintos de cero. Por tanto, la forma cuadrática es de rango 3.

Como hay dos autovalores positivos y uno negativo, se trata de una forma cuadrática indefinida. La signatura de la forma cuadrática es sign(A) = 2.