Febrero 2018 A problema b)

Problemas Se pide:

a) Calcular el subespacio V de $\mathbb{R}^4$ de todos los vectores que son ortogonales a $(0,1,-1,4)$ y $(2,1,1,0)$ (0.5 ptos.). Hallar el subespacio $V^\perp \subset \mathbb{R}^4$, ortogonal a V (0.5 ptos.).

b) Hallar una base en la que la forma cuadrática

$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$$

se exprese en forma canónica (sólo tiene términos cuadrados) (1 pto.).

c) Explicar la factorización LU para matrices regulares (0.5 ptos.) y enunciar una aplicación (0.5 ptos.).

Respuesta

La expresión matricial de la forma cuadrática $Q: R^3 \to R$

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4yz + 2z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Método 1. Método de completar cuadrados

En este caso es bastante sencillo utilizar el método de completar cuadrados.

$$\begin{aligned} Q(x,y,z) &= x^2 + 2y^2 + 4yz + 2z^2 = 2\left(y^2 + 2yz\right) + x^2 + 2z^2 = \\ &= 2\left[(y+z)^2 - z^2\right] + x^2 + 2z^2 = \\ &= 2(y+z)^2 + x^2 = x'^2 + 2y'^2 = \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si se hace el cambio

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Con lo cual, la matriz de paso (que tiene como columnas los vectores de la nueva base) es

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Cometrario: La forma cuadrática Q es semidefinida positiva. Su valor es siempre mayor o igual que cero. Los términos de la diagonal son dos positivos y uno cero.

Comprobamos que $A'=P^T AP$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Así pues, una base respecto de la cual la forma cuadrática Q tiene una forma canónica (suma de cuadrados puros) es

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

<u>Método 2. Diagonalizar mediante el cambio de una base ortonormal</u>

Buscaremos una matriz de paso ortonormal, de modo que $P^T=P^{-1}$, usando la técnica de los autovalores.

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$

Polinomio característico:

$$p(m)=\det(A-mI)=\det\begin{pmatrix}1-m&0&0\\0&2-m&2\\0&2&2-m\end{pmatrix}=$$

$$=-m^3+5m^2-4m=-m(m^2-5m+4)=-m(m-1)(m-4)$$

Autovalores:

$$m_1=4,\quad m_2=1\quad \text{y}\quad m_3=0$$

La forma canónica tiene en su diagonal los autovalores

$$A'=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Autoespacios:

$$E(4)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ tal que }\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&-2&2\\0&2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=0\\-y+z=0\end{cases}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$E(1)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ tal que }\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&2\\0&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}y+2z=0\\2y+2z=0\end{cases}\rightarrow\left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle$$

$$E(0)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ tal que }\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\rightarrow\begin{cases}x=0\\y+z=0\end{cases}$$

$$\rightarrow\left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\rangle$$

Respecto de la base

$$\left\{\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right\}$$

La matriz de paso ortonormal tal que es $P^T=P^{-1}$

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

Comprobación $A'=P^TAP$

$$\begin{pmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Comentario: Se verifica el teorema de inercia de Sylvester