# ESTUDIO MÉTRICO DE LAS CÓNICAS

## Ecuación de una cónica

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} a_{01} & a_{02} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{00} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$X^T AX = 0$$

Ejemplo:

$$x^2 - 6xy - 7y^2 + 10x + 2y + 9 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

La matriz de la cónica es la matriz simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}$$

## Invariantes de la cónica

Son cantidades que no varían, aunque se cambie de sistema de referencia métrico

$I_3 = \det(A)$ (determinante de la matriz)
$I_2 = A_{00}$ (determinante de la matriz de la parte cuadrática)
$I_1 = a_{11} + a_{22}$ (traza de la matriz de la parte cuadrática)

Ejemplo: En la cónica del ejemplo anterior los invariantes son:

$$I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$I_2 = A_{00} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = -16$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 - 7 = -6$$

Los invariantes nos permiten clasificar las cónicas y obtener las ecuaciones reducidas.

**<u>Cambio de sistema de referencia métrico</u>**

Comentario: Un sistema de referencia en el plano Afín (plano de puntos) está formado por un punto y una base de vectores.

$$R = \{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

Se dice que un sistema de referencia es *métrico* si las base $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal orientada positivamente.

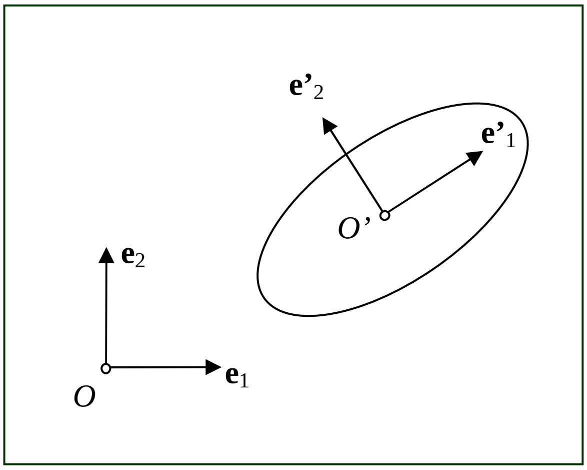
Cuando se hace un cambio de referencia métrico, las coordenadas de un punto cambian, pero se conservan las medidas de distancias y ángulos en ambas coorenadas.

Un cambio de referencia métrico consiste en un giro (transformación ortonormal que conserva la orientación)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y, luego, una traslación.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$




Mediante un giro, se puede diagonalizar la parte cuadrática ($A_{00}$) con una matriz de paso ortonormal orientada positivamente. De este modo se eliminan el término cruzado, *xy*.

Mediante una translación, se pueden eliminar los términos lineales.

(Ver el ejemplo 6.31 de la página 383 del libro de teoría).
(Ver el problema 6.31 resuelto usando MAXIMA)

Comentario: Una vez que se tiene la cónica en su forma reducida es fácil clasificarla y estudiar sus elementos métricos, como distancia focal, semiejes, excentricidad, …

Ejemplo:

Dada la cónica

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & 5 & 1\\ 5 & 1 & -3\\ 1 & -3 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

1º. Se diagonaliza la parte cuadrática mediante un giro. Así se elimina el término cruzado, *xy*.

Parte cuadrática: $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & -7\end{pmatrix}$

Polinomio característico: $p(m)=m^2+6m-16$

Los autovalores son las raíces del polinomio característico: $m=-8$ y $m=2$

Los correspondientes autoespacios son

$$E(-8)=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix}1+8 & -3\\ -3 & -7+8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\} \to \{-3x+y=0 \equiv \left\langle\begin{pmatrix}1\\ 3\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}}\end{matrix}\right\rangle$$

$$E(2)=\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{pmatrix}1-2 & -3\\ -3 & -7-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\} \to \{-x-3y=0 \equiv \left\langle\begin{pmatrix}-3\\ 1\end{pmatrix}\right\rangle=\left\langle\begin{matrix}\frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{1}{\sqrt{10}}\end{matrix}\right\rangle$$

Giro: Las columnas de la matriz del giro son los autovectores normalizados con orientación positiva. Es una matriz de paso ortonormal orientada positivamente.

$$G=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}$$

Para obtener las ecuaciones de la cónica en el nuevo sistema de referencia se hace mediante el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}}\\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

De este modo la ecuación de la cónica

$$(x,y)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(5 \quad 1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 9 = 0$$

Referida al nuevo sistema de referencia, después de hacer el cambio, es

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{-3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(5 \quad 1)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{-3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 9 = 0$$

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \left(\frac{16}{\sqrt{10}}, \frac{-28}{\sqrt{10}}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$-8x'^2 + 2y'^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x' - \frac{28}{\sqrt{10}}y' + 9 = 0$$

2) Ahora se intentan eliminar los términos lineales mediante una translación

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' = x'' + t_1 \\ y' = y'' + t_2 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la cónica:

$$-8(x'' + t_1)^2 + 2(y'' + t_2)^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}(x'' + t_1) - \frac{28}{\sqrt{10}}(y'' + t_2) + 9 = 0$$

Si se desarrollan los cuadrados, se agrupan términos y se identifican los coeficientes lineales a cero resulta que:

$$\begin{cases} -16x''t_1 + \frac{16}{\sqrt{10}}x'' = 0 \\ 4y''t_2 - \frac{28}{\sqrt{10}}y'' = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} t_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ t_2 = \frac{7}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Comentario: Esto también se puede plantear completando cuadrados así

$$-8x'^2 + 2y^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x - \frac{28}{\sqrt{10}}y + 9 = 0$$

$$\begin{cases} -8x'^2 + \frac{16}{\sqrt{10}}x' = -8\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{10}}x'\right) = -8\left(\left(x' - \frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{1}{10}\right) \\ 2y'^2 - \frac{28}{\sqrt{10}}y' = 2\left(y'^2 - \frac{14}{\sqrt{10}}y'\right) = 2\left(\left(y' - \frac{7}{\sqrt{10}}\right)^2 - \frac{49}{10}\right) \end{cases}$$

Haciendo el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{7}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x' - \frac{1}{\sqrt{10}} = x'' \\ y' - \frac{7}{\sqrt{10}} = x'' \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de la cónica

$$-8\left(x''^2 - \frac{1}{10}\right) + 2\left(x'' - \frac{49}{10}\right) + 9 = 0$$

$$-8x''^2 + 2y''^2 = 0$$

Simplificando

$$-4x''^2 + y''^2 = 0$$

Comentario: Factorizando la expresión anterior resulta que se trata de dos rectas que se cortan

$$(y'' + 2x'')(y'' - 2x'') = 0$$

## Clasificación de las cónicas utilizando invariantes

<table>
<tr><td colspan="3">Cónicas<br>REGULARES<br>$\det(A) \neq 0$</td><td>Cónicas<br>DEGENERADAS<br>$\det(A) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} \neq 0$<br>Cónicas con centro</td><td rowspan="2">$A_{00} > 0$<br>ELIPSE</td><td>Real<br>$\mathrm{sig}(A) \neq \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td><td rowspan="2">Un par de rectas imaginarias con un punto real común</td></tr>
<tr><td>Imaginaria<br>$\mathrm{sig}(A) = \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{00} < 0$<br>HIPÉRBOLA</td><td>Un par de rectas reales que se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} = 0$</td><td colspan="2" rowspan="3">PARÁBOLA</td><td>$A_{11} + A_{22} > 0$<br>Par de rectas imaginarias sin intersección real</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} < 0$<br>Par de rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} = 0$<br>Par de rectas coincidentes</td></tr>
</table>

(Ver el cuadro que está en la página 286 del libro de teoría)

## Ecuaciones reducidas de las cónicas usando invariantes

### A) Cónicas con centro $A_{00} \neq 0$

CASO REGULAR $\det(A) \neq 0$

La ecuación reducida es de la forma

$$k_0 + k_1 x^2 + k_2 y^2 = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$\det(A) = k_0 k_1 k_2 \qquad A_{00} = k_1 k_2 \qquad a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$$

De este modo, resulta que

$$k_0 = \frac{\det(A)}{A_{00}}$$

$k_1$ y $k_2$ son las raíces de polinomio

$$m^2 - (a_{11} + a_{22})m + A_{00} = 0$$

Comentario: Este es el polinomio característico de la parte cuadrática. Los valores $k_1$ y $k_2$ son los autovalores.

Comentario: En una ecuación de segundo grado, $m^2 - Sm + P = 0$ el coeficiente de primer grado es el opuesto de la suma de la las raíces, y el termino independiente es el producto de las raíces.

Comentario: Las direcciones de los ejes de las cónicas con centro son las direcciones de los autovectores de la parte cuadrática, $A_{00}$.

Comentario: Las coordenadas del centro de una cónica con centro son

$$C = \left( \frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}} \right)$$

Recordar que los adjuntos que aparecen en la fórmula.

$$A_{01} = -\det\begin{pmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{02} = \det\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{pmatrix} \qquad A_{00} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

i) Cuando $A_{00} > 0$ la cónica es una elipse. Distinguimos dos casos

a) $\mathrm{sig}(A) \neq \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$. Se trata de una elipse real

Ejemplo $x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) $\mathrm{sig}(A) = \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$. Se trata de una elipse imaginaria

Ejemplo $x^2 + y^2 = -4 \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

i) Cuando $A_{00} < 0$ la cónica es una hipérbola.

Ejemplo $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: (Ejemplo 6.33. Página 286 del libro de texto)

La cónica

$$5x^2-3xy+y^2-3x+2y-5=0 \;\rightarrow\; 10x^2-6xy+2y^2-6x+4y-10=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-10 & -3 & 2\\ -3 & 10 & -3\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Los invariantes de esta cónica son

$$I_3=\det(A)=\det\begin{pmatrix}-10 & -3 & 2\\ -3 & 10 & -3\\ 2 & -3 & 2\end{pmatrix}=-132$$

$$I_2=A_{00}=\det\begin{pmatrix}10 & -3\\ -3 & 2\end{pmatrix}=11$$

$$I_1=a_{11}+a_{22}=10+2=12$$

Se trata de una cónica regular con centro del tipo de la elipse. Se trata de una elipse real.

La ecuación reducida es

$$k_0=\frac{\det(A)}{A_{00}}=\frac{-132}{11}=-12$$

$k_1$ y $k_2$ son las raíces de polinomio

$$m^2-(a_{11}+a_{22})m+A_{00}=0$$

$$m^2-12m+11=0$$

Las dos raíces son $m=11$ y $m=1$

La ecuación reducida de la elipse es

$$11x^2+y^2-12=0$$

El centro de la elipse es

$$C=\left(\frac{A_{01}}{A_{00}},\frac{A_{02}}{A_{00}}\right)=\left(\frac{-\det\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}}{11},\frac{\det\begin{pmatrix}-3 & 10\\ 2 & -3\end{pmatrix}}{11}\right)=(0,\quad -1)$$

A partir de la ecuación reducida se pueden calcular los parámetros métricos de la cónica. Por ejemlo, escribiendo la ecuación reducida como

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\frac{12}{11}}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{12}\right)^2}=1$$

resulta ver que el valor de los semiejes son $a=\sqrt{\frac{12}{11}}$ y $b=\sqrt{12}$

CASO DEGENERADO, det($A$) = 0

La ecuación reducida es de la forma

$$k_1x^2+k_2y^2=0$$

$$A'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & k_1 & 0\\ 0 & 0 & k_2\end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$A_{00}=k_1k_2 \qquad\qquad a_{11}+a_{22}=k_1+k_2$$

$k_1$ y $k_2$ son las raíces de polinomio

$$m^2-(a_{11}+a_{22})m+A_{00}=0$$

Ahora distinguimos dos casos

i) Si $k_1$ y $k_2$ tienen el mismo signo, entonces estamos en el caso de dos rectas imaginarias con un punto real en común. Un caso degenerado de la elipse.

Ejemplo $x^2+y^2=0$

i) Si $k_1$ y $k_2$ tienen el signo diferente, entonces estamos en el caso de dos rectas que se cortan en un punto real en común. Es un caso degenerado de la hipérbola.

Ejemplo $x^2 - y^2 = 0 \;\rightarrow\; (x+y)(x-y) = 0$

Ejemplo: Dada la cónica

$$(1, x, y)\begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Los invariantes son:

$$I_3 = \det(A) = \det\begin{pmatrix} 9 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & -7 \end{pmatrix} = 0$$

$$I_2 = A_{00} = \det\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & -7 \end{pmatrix} = -16$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 - 7 = -6$$

Se trata de una cónica con centro del tipo de la hipérbola, degenerada. Es decir, se trata de un par de rectas que se cortan

La ecuación reducida es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$A_{00} = k_1 k_2 = -16 \qquad\qquad a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2 = -6$$

$k_1$ y $k_2$ son las raíces de polinomio

$$m^2 - (a_{11} + a_{22})m + A_{00} = 0$$

$$m^2 + 6m - 16 = 0$$

Por tanto,

$$k_1 = -8 \text{ y } k_2 = 2$$

La forma reducida es $-8x^2 + 2y^2 = 0$

El centro de la cónica es: $C=\left(\frac{A_{01}}{A_{00}},\frac{A_{02}}{A_{00}}\right)=\left(\frac{-\det\begin{pmatrix}5 & -3\\ 1 & -7\end{pmatrix}}{-16},\frac{\det\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}}{-16}\right)=(-2,1)$

Comentario: Para hallar el sistema de referencia de la ecuación reducida de la cónica, se puede elegir como O' el centro y como base los autovectores normalizados.

**<u>B) Cónicas del tipo de la parábola $A_{00}=0$</u>**

<u>CASO REGULAR det($A$) ≠ 0</u>

La ecuación reducida es de la forma

$$k_2y^2+2k_1x=0$$

$$A'=\begin{pmatrix}0 & k_1 & 0\\ k_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k_2\end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$\det(A)=-k_1^{\,2}k_2 \qquad A_{00}=0 \qquad a_{11}+a_{22}=k_2$$

Resulta que

$$k_1^{\,2}=\frac{-\det(A)}{a_{11}+a_{22}} \qquad k_2=a_{11}+a_{22}$$

Ejemplo: (Ejemplo 6.34. Página 287 del Libro de teoría)

La cónica

$$x^2+2xy+y^2+x-2y+1=0 \quad\rightarrow\quad 2x^2+4xy+2y^2+2x-4y+2=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ x\\ y\end{pmatrix}=0$$

Tiene estos invariantes:

$$\det(A)=\det\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}=-18$$

$$A_{00} = \det\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = 2 + 2 = 4$$

Se trata de una parábola regular

La ecuación reducida es de la forma

$$k_2 y^2 + 2k_1 x = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Resulta que

$$k_1{}^2 = \frac{-\det(A)}{a_{11} + a_{22}} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \qquad\qquad k_2 = a_{11} + a_{22} = 4$$

La ecuación reducida es: $4y^2 + 3\sqrt{2}x = 0$

CASO DEGENERADO det($A$) = 0

La ecuación reducida es de la forma

$$k_1 + k_2 y^2 = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$\det(A) = 0 \qquad\qquad A_{00} = 0 \qquad\qquad a_{11} + a_{22} = k_2$$

Para calcular el término $k_1$, hay que hacerlo directamente y resulta

$$k_1 = \frac{A_{11} + A_{22}}{a_{11} + a_{22}} \qquad\qquad a_{11} + a_{22} = k_2$$

Podemos distinguir dos casos:
i) Si $A_{11} + A_{22} \neq 0$

i$_1$) Si $A_{11} + A_{22} \neq k_1 k_2 > 0$, entonces $k_1$ y $k_2$ tienen el mismo signo y la cónica está formada por un par de rectas imaginarias sin intersección real

i$_2$) Si $A_{11} + A_{22} \neq k_1 k_2 < 0$, entonces $k_1$ y $k_2$ tienen distinto signo y la cónica está formada por un par de rectas paralelas.

i) Si $A_{11} + A_{22} = 0$, la cónica se reduce a un par de rectas coincidentes.

Ejemplo:

La cónica

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 - 6x + 6y + 4 = 0 \quad \rightarrow \quad (1 \quad x \quad y)\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Los invariantes son:

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{00} = \det\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = 2 + 2 = 4$$

$$A_{11} + A_{22} = \det\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = -1 - 1 = -2 < 0$$

Se trata de una parábola degenerada. Es un par de rectas paralelas.

$$k_1 + k_2 y^2 = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = \frac{A_{11} + A_{22}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \qquad\qquad a_{11} + a_{22} = k_2 = 4$$

La ecuación reducida es $4y^2 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{8}$