ÁLGEBRA

Curso 2023—2024

Enero 2024 A

allave@madrid.uned.es

PREGUNTAS CORTAS

1. (1 punto) Considere el sistema matricial $AX=B$, siendo $A\in \mathcal{M}_{7\times 4}$ la matriz de los coeficientes, $X \in \mathcal{M}_{4\times 1}$ la matriz de las incógnitas y $B\in \mathcal{M}_{7\times 1}$ la matriz de los términos independientes. Justifique de manera razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: Si rango $(A)=4$ y existe $\overline{X}$ solución del sistema de ecuaciones $AX=B$ (Es decir, $A\overline{X}=B$) entonces el sistema $AX=B$ es compatible determinado.

$AX=B$ es un sistema de 7 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \\ a_{71}x_1 + a_{72}x_2 + a_{73}x_3 + a_{74}x_4 = b_7 \end{cases}$$

Para que el sistema $AX=B$ sea compatible determinado tiene que ocurrir que

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 4$$

Siendo A^* la matriz ampliada (Teorema de Rouché-Frobenius) Es decir, $\vec{b} \in \langle \vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}, \vec{c_4}, \vec{c_5}, \vec{c_6}, \vec{c_7} \rangle$

vectores columna

$\Longleftrightarrow$ Hay solución $(x_1, \ldots, x_4)$

Si existe $\overline{X}$ tal que $A\overline{X}=B$,

$\Rightarrow$ B es una combinación lineal de los vectores columna de A. $\Rightarrow$

$$A\overline{X}=B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \\ \overline{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_7 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\overline{x}_1 + a_{12}\overline{x}_2 + a_{13}\overline{x}_3 + a_{14}\overline{x}_4 = b_1 \\ a_{21}\overline{x}_1 + a_{22}\overline{x}_2 + a_{23}\overline{x}_3 + a_{24}\overline{x}_4 = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{71}\overline{x}_1 + a_{72}\overline{x}_2 + a_{73}\overline{x}_3 + a_{74}\overline{x}_4 = b_7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{71} \end{pmatrix} + \overline{x}_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{72} \end{pmatrix} + \overline{x}_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{73} \end{pmatrix} + \overline{x}_4 \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ \vdots \\ a_{74} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_7 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(A^*) = \text{rang}(A)$ $\boxed{\text{ES VERDADERA}}$

Recordar que $\text{rang}(A) = \text{rang}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4\}$

$\text{rang}(A^*) = \text{rang}\{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4, \vec{b}\}$

$$\begin{array}{cccccc} & \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \vec{c}_3 & \vec{c}_4 & \vec{b} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & b_7 \end{array}\right)$$ matriz ampliada

(1 punto)

2 Halle los valores de x e y para que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ 5 & -18 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$$

sean linealmente dependientes

4

Si consideramos las matrices 2×2 como vectores del $\mathbb{R}^4$. Podemos enunciar el problema como: hallar los valores x e y para que los vectores

$$\{(x, y, 5, -18), (1, 2, -1, 3), (0, 1, 2, -7)\}$$

sean linealmente dependientes.

Si estudiamos el rango del sistema de vectores usando el método de Gauss

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ x & y & 5 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & y-2x & 5+x & -18-3x \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 5x-2y+5 & 17x+7y-18 \end{pmatrix} \sim$$

para que el rang$(A) = 2$ es necesario que

$$\begin{cases} 5x-2y+5=0 \\ -17x+7y-18=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$$

$5+x-2y+4x$

$-18-3x+7y-14x = -17x+7y-18$

4-bis

(%i3) A:matrix([x,y,5,-18],[1,2,-1,3],[0,1,2,-7]);

(%o3) $$\begin{pmatrix} x & y & 5 & -18 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

(%i5) triangularize(A);

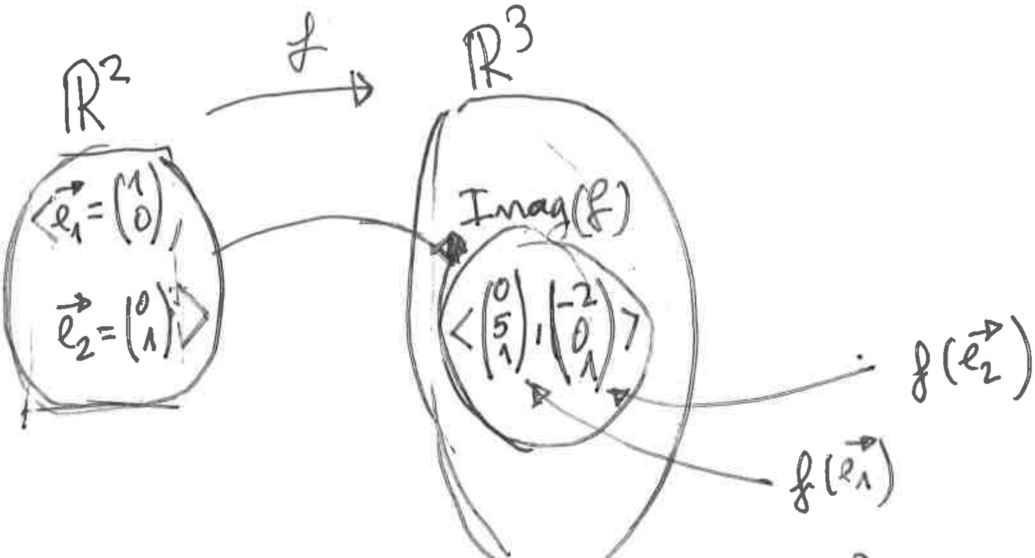
(%o5) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & -2\,y+5\,x+5 & 7\,y-17\,x-18 \end{pmatrix}$$

(%i15) linsolve([-2·y+5·x+5=0, 7·y-17·x-18=0],[x, y]);

(%o15) $[x=1, y=5]$

5

3) (1 punto) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal que verifica $f(1,0) = (0,5,1)$ y $f(0,1) = (-2,0,1)$.
Justifique de manera razonada si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:
La imagen de f de cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ pertenece al plano $5x - 2y + 10z = 0$.



La forma paramétrica de Imag(f) es el espacio generado por los transformados de los elementos de la base del conjunto inicial

Ya que
$$f(\vec{x}) = f(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2)$$
$$\in \langle f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2) \rangle$$

6

$$\mathrm{Imag}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

La forma implícita de Imag(f) equivale a

$$\mathrm{rang}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} = 2$$

Teniendo en cuenta que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & -2y & -2z-x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -5x+2y-10z \end{pmatrix}$$

$$-10z - 5x + 2y - 10z$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5x-2y+10z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathrm{rango}(A) = 2 \iff 5x - 2y + 10z = 0$$

Por tanto la forma implícita de Imag(f) es el plano

$$5x - 2y + 10z$$

$$\boxed{\text{ES VERDADERA}}$$

```
(%i1) A:matrix([-2,0,1],[0,5,1],[x,y,z]);
```

(%o1) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix}$

```
(%i2) triangularize(A);
```

(%o2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -2 \\ 0 & 0 & -10\,z+2\,y-5\,x \end{pmatrix}$

También se puede usar el comando "eliminate"

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -2b \\ y = 5a \\ z = a+b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2b=0 \\ y-5a=0 \\ z-a-b=0 \end{cases}$$

Sintaxis

eliminate([exp 1, exp 2, ...] [a, b])

expresiones igualadas a 0

```
(%i1) eliminate([x+2·b,y-5·a,z-a-b],[a,b]);
(%o1) [10 z-2 y+5 x]
```

Comentario:

Se puede comprobar que los vectores que generan $\mathrm{Imag}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ verifican la ecuación

$$5x - 2y + 10z = 0$$

4) (1 punto) Razone si la siguiente afirmación es correcta: Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son autovectores de la matriz A asociados a un mismo autovalor $\lambda = 5$, entonces $\vec{u} + \vec{v}$ es un autovector de la matriz A asociado al autovalor $\lambda = 5$

- $\vec{u}$ es autovalor asociado a $\lambda = 5 \Rightarrow f(\vec{u}) = 5\vec{u}$
- $\vec{v}$ es autovalor asociado a $\lambda = 5 \Rightarrow f(\vec{v}) = 5\vec{v}$

$$\Rightarrow f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = 5\vec{u} + 5\vec{v} = 5(\vec{u} + \vec{v})$$

$\Longleftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})$ es autovector asociado al autovalor $\lambda = 5$

Comentario: El conjunto de vectores asociados a un autovalor ... un subespacio vectorial, llamado el AUTOESPACIO

5) (1 punto) Sea V un espacio vectorial dotado de un producto escalar •. Defina transformación ortogonal $T: V \to V$ y dé un ejemplo de transformación ortogonal $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Un endomorfismo $T: V \to V$ de un espacio euclídeo se dice que es ortogonal si conserva el espacio escalar. Es decir $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ se verifica que

$$T(\vec{x}) \cdot T(\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$$

Alguna de las propiedades de las transformaciones ortogonales son

i) T conserva las normas, ángulos y distancias

ii) T transforma bases ortogonales en bases ortogonales

iii) Si G es la matriz una transformación ortogonal

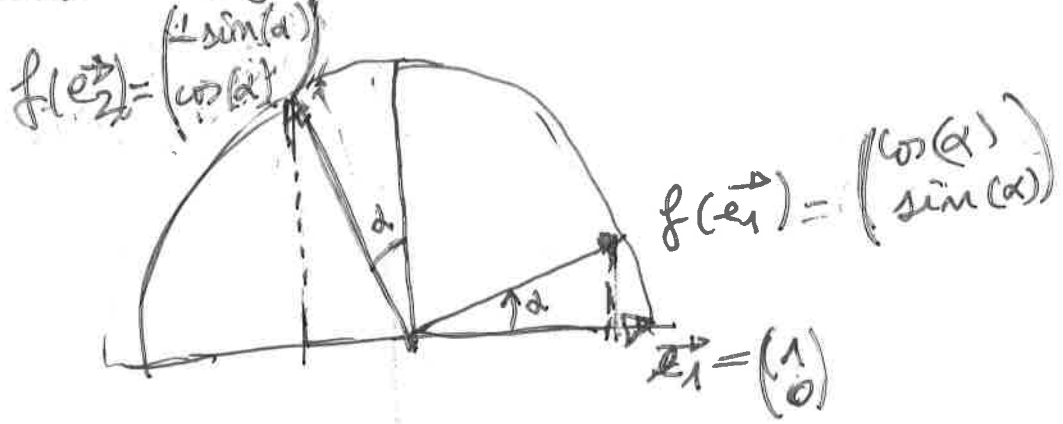
$$GG^t = I$$

iv) Si T admite un autovalor $\lambda = +1$ ó $\lambda = -1$.

v) Las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ son giros o simetrías

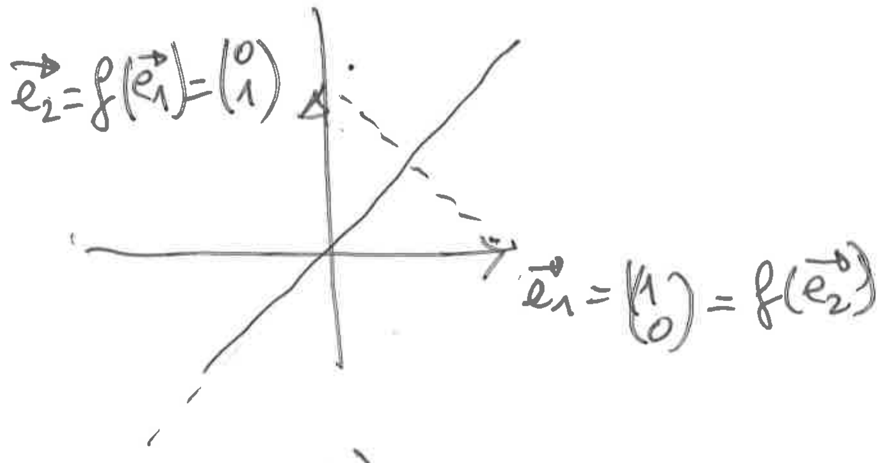
Un ejemplo de transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ es un giro de ángulo α

Recordando que la matriz de una aplicación lineal es la que tiene por columnas los transformados de la base



$$G = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Otro ejemplo, podría ser una simetría
Por comodidad consideremos una simetría respecto de la diagonal del 1er cuadrante



$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6 (1punto) Sea $Q(x_1,x_2)=x_1^2+4x_1x_2-2x_2^2$ una forma cuadrática (definida respecto a la base canónica $\mathcal{B}$). Halle la expresión canónica de Q, es decir, halle la base $\mathcal{B}'$ con respecto a la cual la forma canónica Q solo tenga términos cuadrados

Recordemos que la expresión analítica de una forma cuadratica es

$$Q(\vec{x}) = X^t A X \qquad (A \text{ es una matriz simétrica})$$

Si se considera un cambio de base

$$\begin{tikzcd} X & & X' \\ & \vec{x} \arrow[ul, "B"] \arrow[ur, "B'"'] & \end{tikzcd}$$

$\left\{ \begin{array}{l} P \rightarrow \text{matriz de paso} \\ X = PX' \; ; \; X^t = X'^t P^t \\ P \text{ tiene por columnas} \\ \text{los elementos de la} \\ \text{nueva base} \end{array} \right.$

$$G(\vec{x}) = X^t A X = X'^t \underbrace{P^t A P}_{A'} X'$$

$$A' = P^t A P$$

si exigimos que P sea una matriz otogonal ($P^t = P^{-1}$) tenemos que $A' = P^{-1} A P$

De modo que A' diagonal es la matriz que diagonaliza el endomorfismo de matriz A

En nuestro caso

$$Q(x_1,x_2) = (x_1, x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Si diagonalizamos la matriz A

- Polinomio característico

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{(-1)}_{\text{traza}}\lambda + \underbrace{(-6)}_{\det(A)} = \lambda^2+\lambda-6$$

- Autovalores

$$\lambda^2+\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1\pm5}{2} =$$

$$\lambda = \begin{cases} -3 \\ 2 \end{cases}$$

- Autoespacios (autovectores)

$$E(-3) = \left\{ (x_1,x_2) \text{ tales que } \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$\{2x_1+x_2=0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

13

$$E(2) = \{(x_1, x_2) \text{ tales que } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} =$$

$$= \{-x_1 + 2x_2 = 0\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\rangle$$

Observa que los dos autovectores son ortogonales porque hemos impuesto que la matriz P es ortogonal

Por tanto la matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

y la nueva base es

$$\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right\}$$

Comentario: (Teorema de inercia)

PROBLEMAS

7) (2 puntos) Si $B = \{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x), P''''(x)\}$ es una base del espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual que 4, $\mathcal{P}_4$, siendo $P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, calcule las coordenadas del polinomio $Q(x) = x^4 + 9x^3 + 19x^2 + 35x + 59$ respecto a la base B

Nota: $P'(x), P''(x), P'''(x), P''''(x)$ son las derivadas sucesivas de $P(x)$ respecto a x

respecto de B'

$$Q(\vec{x}') = (x_1', x_2')\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = -3x_1'^2 + 2x_2'^2$$

(Es forma cuadrática INDEFINIDA)

(%i1) A:matrix([1,2],[2,-2]);

(%o1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(%i2) eigenvalues(A);

(%o2) $[[-3,2],[1,1]]$

(%i3) eigenvectors(A);

(%o3) $\left[[[-3,2],[1,1]],\left[[[1,-2]],\left[\left[1,\frac{1}{2}\right]\right]\right]\right]$

(%i4) load("diag");

(%o4) */usr/local/Cellar/maxima/5.46.0_3/share/maxima/5.46.0/share/contrib/diag.mac*

(%i22) J:jordan(A);

(%o22) $[[-3,1],[2,1]]$

(%i23) dispJordan(J);

(%o23) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(%i28) P:ModeMatrix(A,jordan(A));

(%o28) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(%i33) P^^(-1).A.P;

(%o33) $\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

15

Si identificamos P_4 con $\mathbb{R}^5$
usando como referencia la base canónica $\{x^4, x^3, x^2, x, 1\}$
tenemos que

$$P(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \rightarrow (1, 1, 1, 1, 1)$$

$$P'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \rightarrow (0, 4, 3, 2, 1)$$

$$P''(x) = 12x^2 + 6x + 2 \rightarrow (0, 0, 12, 6, 2)$$

$$P'''(x) = 24x + 6 \rightarrow (0, 0, 0, 24, 6)$$

$$P''''(x) = 24 \rightarrow (0, 0, 0, 0, 24)$$

$$Q(x) = x^4 + 9x^3 + 19x^2 + 35x + 59 \rightarrow (1, 9, 19, 35, 59)$$

Nuestro problema es escribir

$$Q(x) = a\,P(x) + b\,P'(x) + c\,P''(x) + d\,P'''(x) + e\,P''''(x)$$

Es decir, se trata de resolver un problema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas

$$a\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\4\\3\\2\\1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0\\0\\12\\6\\2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}0\\0\\0\\24\\6\end{pmatrix} + e\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\9\\19\\35\\59\end{pmatrix}$$

Es sencillo de resolver porque es un sistema escalonado

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + 4b = 9 \\ a + 3b + 12c = 19 \\ a + 2b + 6c + 24d = 35 \\ a + b + 2c + 6d + 24e = 59 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \\ d = 1 \\ e = 2 \end{cases}$$

8 Sean L_1 y L_2 los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$

- $L_1 = \langle (3,-4,0,1), (2,2,0,-4), (1,-6,0,5) \rangle$
- $L_2 = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0) \rangle$

Calcule de manera razonada las dimensiones de los siguientes subespacios

- L_1 (0,5 puntos)
- L_2 (0,5 puntos)
- $L_1 \cap L_2$ (0,5 puntos)
- $L_1 + L_2$ (0,5 puntos)

Para estudiar la dimensión de L_1 estudiamos el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Usando el método de reducirlo a una matriz escalonada

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto significa que rau

$$\text{rang}(A) = \dim(L_1) = 2$$

$$L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Para estudiar la dimensión de L_2 estudiamos ~~el~~ rango de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

como se trata de una matriz escalonada

$$\text{rang}(B) = \dim(L_2) = 3$$

$$L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- Para estudiar $L_1 \cap L_2$ nos interesa tener expresados L_1 y L_2 en forma implícita. Para ello eliminamos parámetros

- $L_1 = \left\{ (x, y, z, t) \text{ tal que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

Si eliminamos los parámetros obtenemos un sistema de 2 ecuaciones con 4 incógnitas

$$\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -4\lambda + \mu \\ z = 0 \\ t = \lambda - \mu \end{cases}$$

Eliminar los parámetros se puede hacer por muchos métodos (igualación, sustitución, ...). Usaremos el procedimiento sistemático del método de Gauss

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = 2$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3y+4x & 3z & 3t-x \end{pmatrix} =$$

$$= \text{rang}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3z & 3t-x+3y+4x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3z = 0 \\ 3x+3y+3t = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x+y+t = 0 \end{cases}$$

Comentario: Una comprobación es ver que los vectores que generan $L_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ satisfacen el sistema de ecuaciones

(%i1) `A:matrix([3,-4,0,1],[2,2,0,-4],[1,-6,0,5]);`

(%o1)
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

(%i2) `rank(A);`

(%o2) 2

(%i3) `triangularize(A);`

(%o3)
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(%i18) `ec1:x-3·a;`

(%o18) $x-3\,a$

(%i19) `ec2:y+4·a-b;`

(%o19) $y-b+4\,a$

(%i20) `ec3:z;`

(%o20) z

(%i21) `ec4:t-a+b;`

(%o21) $t+b-a$

(%i23) `eliminate([ec1,ec2,ec3,ec4],[a,b]);`

(%o23) $[9\,(y+x+t),z]$

(%i28) `triangularize(matrix([3,-4,0,1],[0,1,0,-1],[x,y,z,t]));`

(%o28)
$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3\,z & 3\,y+3\,x+3\,t \end{pmatrix}$$

- $L_2 = \left\{ (x,y,z,t) \text{ tal que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sigma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Si eliminamos los parámetros va a resultar un sistema de 1 ecuación con 4 incógnitas

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \sigma \\ t = 0 \end{cases}$$

Aquí es claro que la forma implícita de L_2 es el sistema

$$\{ t = 0$$

- $L_1 \cap L_2 = \left\{ (x,y,z,t) \text{ tal que } \left.\begin{cases} \left.\begin{aligned} z = 0 \\ x + y + t = 0 \end{aligned}\right\} L_1 \\ \left.t = 0 \right\} L_2 \end{cases}\right\}(*)$

Se ve que es un sistema de 3 ecuaciones con 4 incógnitas linealmente independientes ya que es un sistema escalonado

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

La solución general va a depender de 1 parámetro. A ojo, se ve que

$$(*) \approx \{ x + y = 0 \implies \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \implies$$

$$L_1 \cap L_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Por tanto,

$$\dim(L_1 \cap L_2) = 1$$

Una comprobación es ver que el vector $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ que genera $L_1 \cap L_2$ verifica las ecuaciones de L_1 y de L_2 simultaneamente

- El subespacio $L_1 + L_2$ es el espacio generado por la unión de los vectores que generan L_1 y los vectores que generan L_2. Es decir

$$L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}3\\-4\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$$

Reducimos el sistema a forma escalonada para buscar un sistema de generadores linealmente independiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L_1 + L_2 = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4$$

Por tanto, $\dim(L_1 + L_2) = 4$

Una comprobación es ver que se cumple la relación

$$\dim(L_1+L_2)=\dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(L_1\cap L_2)$$
$$4 = 2 + 3 - 1$$

(%i2) rank(matrix([3,-4,0,1],[2,2,0,-4],[1,-6,0,5],[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0]));

(%o2) 4

(%i3) rank(matrix([3,-4,0,1],[2,2,0,-4],[1,-6,0,5]));

(%o3) 2

(%i4) rank(matrix([1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0]));

(%o4) 3