Febrero 2019 B ejercicio 6

Ejercicio 6 Clasificar la cónica de ecuación $x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 + 8x_2 + 9 = 0$.

Escribimos la cónica con notación matricial

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Para clasificarla usando los invariantes, empezamos por calcularlos
Los invariantes de esta cónica son:

$$I_3 = \det(A) = \det \begin{pmatrix} 9 & -3 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = -16 < 0$$

$$I_2 = A_{00} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = 1 + 4 = 5 > 0$$

Se trata de una cónica regular, del tipo de la elipse. Es una elipse real.

<table>
<tr><td colspan="3">Cónicas
REGULARES
$\det(A) \neq 0$</td><td>Cónicas
DEGENERADAS
$\det(A) = 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} \neq 0$
Cónicas con centro</td><td rowspan="2">$A_{00} > 0$
ELIPSE</td><td>Real
$\mathrm{sig}(A) \neq \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td><td rowspan="2">Un par de rectas imaginarias con un punto real común</td></tr>
<tr><td>Imaginaria
$\mathrm{sig}(A) = \mathrm{sig}(a_{11} + a_{22})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$A_{00} < 0$
HIPÉRBOLA</td><td>Un par de rectas reales que se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$A_{00} = 0$</td><td colspan="2" rowspan="3">PARÁBOLA</td><td>$A_{11} + A_{22} > 0$
Par de rectas imaginarias sin intersección real</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} < 0$
Par de rectas paralelas</td></tr>
<tr><td>$A_{11} + A_{22} = 0$
Par de rectas coincidentes</td></tr>
</table>

Buscamos ahora la ecuación reducida usando los invariantes

La forma reducida de una elipse es de la forma

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 \\ 0 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 \end{pmatrix}$$

Identificando los invariantes de la matriz de la cónica con los de la forma reducida

$$\det(A) = k_0 k_1 k_2 \qquad A_{00} = k_1 k_2 \qquad a_{11} + a_{22} = k_1 + k_2$$

De este modo, resulta que

$$k_0 = \frac{\det(A)}{A_{00}}$$

k_1 y k_2 son las raíces de polinomio

$$m^2 - (a_{11} + a_{22})m + A_{00} = 0$$

En nuestro caso, es inmediato que $k_1 = 1$ y $k_2 = 4$, ya que la parte cuadrática es diagonal.

El valor $k_0 = \dfrac{-16}{4} = -4$

Así pues, la ecuación reducida es

$$x^2 + 4y^2 = 4 \quad \to \quad \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$$

Se trata de una elipse con semiejes $a = 2$ y $b = 1$

Las coordenadas del centro de una cónica con centro son

$$C = \left(\frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}} \right) = \left(\frac{12}{4}, \frac{-4}{4} \right) = (3, -1)$$

Recordar que los adjuntos que aparecen en la fórmula son.

$$A_{01} = -\det\begin{pmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 12 \qquad A_{02} = \det\begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} \\ a_{02} & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{00} = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = 4$$

Otra manera se abordar el ejercicio es buscar transformaciones métricas que reduzcan la ecuación a su forma canónica.

Como en la ecuación no existen términos cruzados no es necesario hacer un giro para eliminarlos. Basta, pues, con hacer una traslación adecuada que elimine los términos lineales

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$$

$$(x'+a)^2 + 4(y'+b)^2 - 6(x'+a) + 8(y'+b) + 9 = 0$$

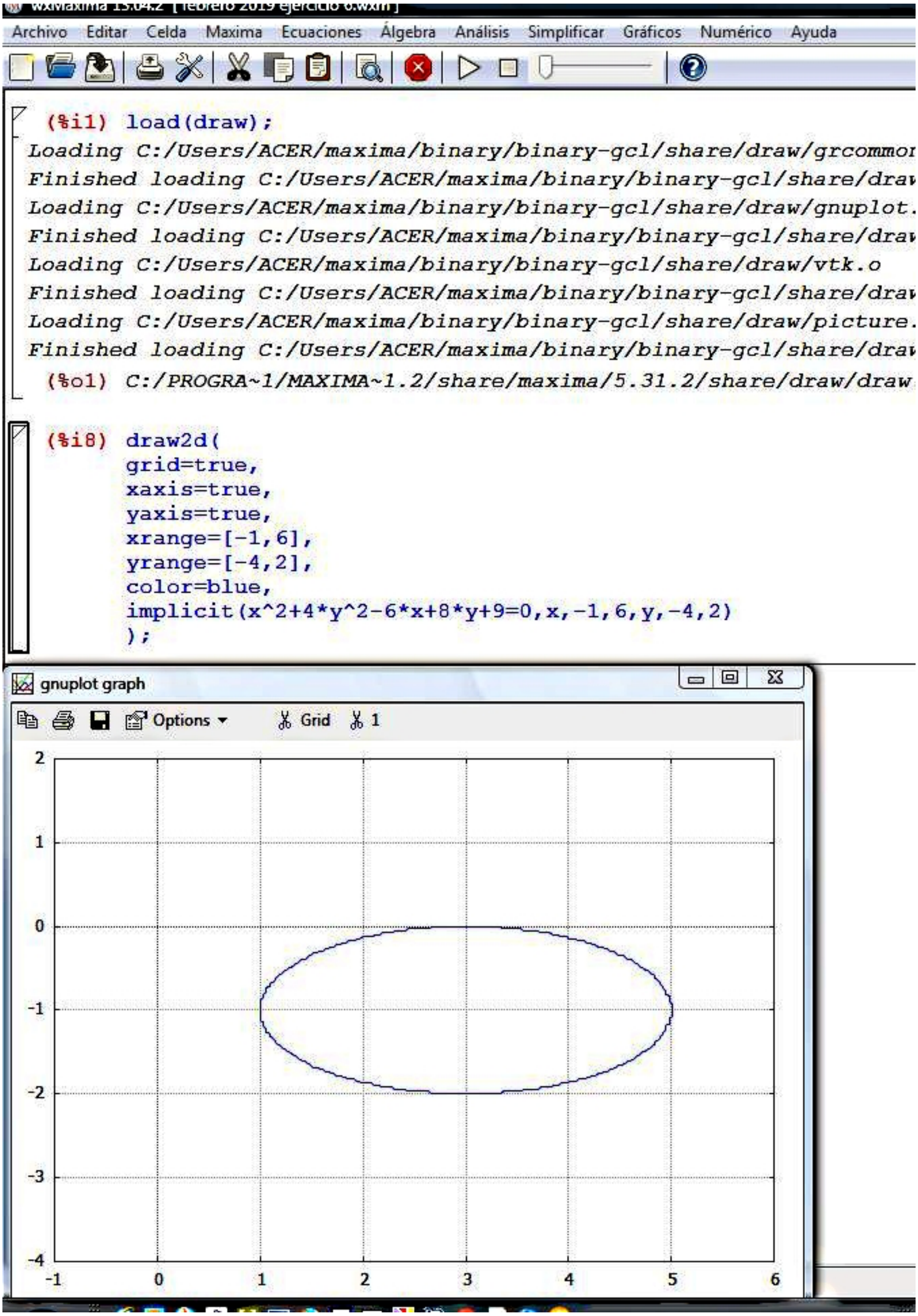
$$x'^2 + 2ax' + a^2 + 4y'^2 + 8by' + 4b^2 - 6x' - 6a + 8y' + 8b + 9 = 0$$

$$x'^2 + 4y'^2 + (2a-6)x' + (8b+8)y' + (a^2 + 4b^2 - 6a + 8b + 9) = 0$$

Haciendo la translación del origen del sistema de referencia al punto $O' = (a, b) = (3, -1)$, resulta la ecuación reducida

$$x'^2 + 4y'^2 - 4 = 0$$

En la siguiente página se puede ver una representación gráfica hecha don MAXIMA


Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
(%i1) load(draw);
Loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/grcommon
Finished loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw
Loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/gnuplot.
Finished loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw
Loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/vtk.o
Finished loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw
Loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw/picture.
Finished loading C:/Users/ACER/maxima/binary/binary-gcl/share/draw
(%o1) C:/PROGRA~1/MAXIMA~1.2/share/maxima/5.31.2/share/draw/draw
(%i8) draw2d(
grid=true,
xaxis=true,
yaxis=true,
xrange=[-1,6],
yrange=[-4,2],
color=blue,
implicit(x^2+4*y^2-6*x+8*y+9=0,x,-1,6,y,-4,2)
);
gnuplot graph
Options
Grid
1
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-1
0
1
2
3
4
5
6