FORMAS CUADRATICAS

Comentario: Vamos a estudiar los polinomios de grado dos, en varias variables, utilizando las técnicas del Álgebra lineal.

Comentario: Para simplificar las expresiones, nos centraremos en el espacio R^3.

Definición

Una *forma cuadrática* es una aplicación $Q : R^3 \to R$ que viene dada por una expresión de la forma (polinomio sólo con términos de grado dos)

$$Q(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

Esta expresión se puede escribir utilizando una matriz simétrica así

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Con notación matricial

$$Q(\vec{x}) = X^T AX$$

Ejemplo:

$$Q(x, y, z) = x^2 - 3y^2 + 6xy + 2xz$$

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Efectos del cambio de base

Si en R^3 hacemos un cambio de base con una matriz de paso *P*, de modo que $X = PX'$

Resulta que

$$Q(\vec{x}) = X^T AX = X'^T P^T APX'$$

Con lo cual, respecto de la nueva base, la matriz de la forma cuadrática es

$$A' = P^T AP$$

Comentario: Comparar el efecto del cambio de base en la matriz de una forma cuadrática con el efecto del cambio de base en la matriz de un endomorfismo.

Si A es la matriz de un endomorfismo: $A' = P^{-1}AP$
Si A es la matriz de una forma cuadrática: $A' = P^{T}AP$

Comentario: Dos matrices de una misma forma cuadrática en diferentes bases, están relacionadas por la igualdad $A' = P^{T}AP$, donde P es una matriz regular.
A estas matrices así relacionadas se llaman *congruentes*.

Diagonalización de una forma cuadrática

Mediante un cambio de base adecuado, se puede conseguir que en la expresión de una forma cuadrática desaparezcan los "términos cruzados", quedando sólo como una suma de términos "cuadrados puros".

Hay varias formas de hacer esto. Una de ellas es utilizar el método de Gauss de *completar cuadrados*.

Ejemplo:

$$Q(x,y) = 2x^2 - 6xy + y^2 = 2x^2 + (y-3x)^2 - 9x^2 = -7x^2 + (y-3x)^2 = -7x'^2 + y'^2$$

Haciendo el cambio de variable

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y - 3x \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

La matriz del cambio de base es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que $A' = P^{T}AP$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comentario: La forma diagonal de una forma cuadrática no es única.

<u>Diagonalización mediante un cambio de base ortonormal</u>

Si buscamos un cambio de base ortonormal, de modo que $P^{T} = P^{-1}$, podemos aplicar la tería desarrollada cuando se estudió la diagonalización de endomorfismos.

Así, resulta que referido a una base formada por los autovectores (normalizados) de A, la forma cuadrática tiene una expresión diagonal, que tiene en la diagonal los autovalores de A.

En el ejemplo anterior,

$$Q(x,y) = 2x^2 - 6xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Los autovalores de A son las raíces del polinomio característico

$$m^3 - 3m - 7 = 0 \;\; \rightarrow \;\; m_1 = \frac{3+\sqrt{37}}{2} \approx 4{,}5414 \qquad\qquad m_2 = \frac{3-\sqrt{37}}{2} \approx -1{,}5414$$

Comentario: (Ver página 222 del libro de texto) Las matrices simétricas siempre se pueden diagonalizar respecto a una base ortonormal de vectores propios.

Una de las formas reducida de esta forma cuadrática es pues $A' = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$.

<u>Teorema de inercia de Silvestre</u>

Si A_1 y A_2 son dos matrices diagonales asociadas a la forma cuadrática Q en distintas bases, el número de elementos positivos y el número de elementos negativos en A_1 es el mismo que en A_2, independientemente de las bases utilizadas.

Comentario: Observar que en los ejemplos anteriores la forma cuadrática tenía dos formas reducidas diferentes, pero en ambas uno de los elementos de la diagonal era positivo y el otro negativo.

Definición:

Se llama *rango* de una forma cuadrática al rango de la matriz asociada

$$\text{rang}(Q) = \text{rang}\,(A)$$

Se llama *signatura* de una forma cuadrática al número de términos positivos no nulos de de su forma diagonal asociada.

Ejemplo

$$Q(x,y) = x^2 + 6xy + 9y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Una de las posibles formas diagonales de Q es la que se obtiene hallando los autovalores de A.

Las raíces del polinomio característico son

$$m^2 - 10m = 0 \;\; \rightarrow \;\; m_1 = 0 \qquad m_2 = 10$$

Para esta forma cuadrática, la forma diagonal reducida es:

$$Q(x', y') = 10y'^2 = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y rang(Q) =1 y sig(Q) =1

El rango y la signatura de una forma cuadrática son *invariantes*, no dependen de la base de referencia.

Clasificación de formas cuadráticas

Dada una forma cuadrática $Q : R^n \to R$

Definida positiva	$Q(\vec{x}) = X^T AX > 0\,, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$	rang(Q) = sig(Q) = n	$Q(x, y) = x^2 + 6y^2$
Semidefinida positiva	$Q(\vec{x}) = X^T AX \geq 0\,, \quad \forall \vec{x}$	rang(Q) = sig(Q) < n	$Q(x, y) = 3x^2$
Definida negativa	$Q(\vec{x}) = X^T AX < 0\,, \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}$	rang(Q) = n sig(Q) = 0	$Q(x, y) = -4x^2 - 5y^2$
Semidefinida negativa	$Q(\vec{x}) = X^T AX \leq 0\,, \quad \forall \vec{x}$	rang(Q) < n sig(Q) = 0	$Q(x, y) = -5y^2$
Indefinida	$\exists \vec{x_1}, \vec{x_2} : \; Q(\vec{x_1}) < 0 \text{ y } Q(\vec{x_2}) > 0$	rang(Q) $\neq$ sig(Q) sig(Q) $\neq$ 0	$Q(x, y) = 3x^2 - 5y^2$

Comentario: Clasificar las formas cuadráticas es muy importante porque en las funciones reales de varias variables, lo que hace el papel de la segunda derivada es una forma cuadrática.

En las funciones de una variable el signo de la segunda derivada sirve para discernir si los puntos críticos son máximos, mínimos o puntos de inflexión. En las funciones de varias variables el signo de una forma cuadrática define la naturaleza de los puntos críticos que anulan el gradiente y permite decidir si son máximos, mínimos o puntos de silla.

Según hemos visto, una de las formas de clasificar formas cuadráticas es hallar los autovalores de su matriz y ver si

- todos los autovalores son positivos (definida positiva)

- todos los autovalores son positivos, salvo alguno que es cero (semidefinida positiva)

- todos los autovalores son negativos (definida negativa)

- todos los autovalores son negativos, salvo alguno que es cero (semidefinida negativa)

- algún autovalor es positivo y algún autovalor es negativo (indefinida)

Ver página 269 del libro de texto

Ejemplo:

$$Q(x,y)=2x^2+3xy+6y^2=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

El polinomio característico es:

$$m^2-8m+\tfrac{39}{4}$$

Los autovalores son $m_1=\frac{3}{2}$ y $m_2=\frac{13}{2}$

Como ambos son positivos se trata de una forma cuadrática definida positva.

Ejemplo:

$$Q(x,y,z)=x^2+2y^2+4yz+2z^2=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$-m^3+5m^2+4m=-m(m-1)(m-4)$$

Los autovalores son: $m_1=0$, $m_2=1$ y $m_2=4$

Todos los autovalores son positivos, salvo alguno que es cero. Por tanto, es una forma cuadrática semidefinida positiva.

Ejemplo:

$$Q(x,y,z)=3x^2+2xy+2xz+4yz=\begin{pmatrix}x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

El polinomio característico es

$$-m^3+3m^2+6m-8=-(m+2)(m-1)(m-4)$$

Los autovalores son: $m_1=-2$, $m_2=1$ y $m_2=4$

Algunos autovalores son positivos y algunos son negativos. Por tanto, es una forma cuadrática indefinida.

Comentario: Los resultados anteriores se pueden cionfirmar dando algunos valores particulares. Por ejemplo, en este último caso podemos comprobar que $Q(0,1,1)=4$ y $Q(0,-1,1)=-4$

Criterio de Silvester para clasificar formas cuadráticas

Es un criterio que permite clasificar rápidamente una forma cuadrática, sin necesidad de calcular los autovalores

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Consideremos las submatrices que se obtienen ampliando la esquina de arriba a la izquierda.

$\Delta_1 = a_{11}$

$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

Criterio de Silvestre para la forma cuadrática $Q : R^3 \to R$, con matriz asociada *A*.

Definida positiva	$\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$
Semidefinida positiva	$\Delta_3 = 0$, $\Delta_2 \geq 0$ $\Delta_1 \geq 0$
Definida negativa	$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$
Semidefinida negativa	$\Delta_1 \leq 0$, $\Delta_2 \geq 0$, $\Delta_3 = 0$

Comentario: Para recordar el significado del criterio basta pensar el caso de que la matriz *A* sea diagonal.

Ejemplo:

$$Q(x, y) = 2x^2 + 3xy + 6y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = a_{11} = 2 > 0$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 6 \end{pmatrix} = \frac{39}{4} > 0$$

Es definida positiva

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 4yz + 2z^2 = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Es semidefinida positiva

Ejemplo:

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + 2xy + 2xz + 4yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{11} = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

$$\Delta_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -8 < 0$$

Es indefinida