Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Feberero [1]. 2017

- **Ejercicios 1 a 6**: *Deben ser contestados en hoja de test. Cada respuesta correcta suma 1pto, incorrecta resta 0.33ptos, las dobles marcas o en blanco ni suman ni restan.*
- **Problema**: *Se corregirá sólo si la nota obtenida en los 6 ejercicios es igual o superior a 2ptos.*

Ejercicio 1 El elemento neutro de la operación $a * b = ab - a - b + 2$, definida en el conjunto de números enteros verifica: **A)** No existe; **B)** Es 1; **C)** Es 2; **D)** Ninguno de ellos.

Ejercicio 2 Un subespacio de $\mathbb{R}^3$ es: **A)** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon xy = 1\}$; **B)** $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = y \text{ ó } x = z\}$; **C)** $\{(2x, x, -5x) \colon x \in \mathbb{R}\}$; **D)** Ninguno de ellos.

Ejercicio 3 La matriz asociada al endomorfismo definido por el cálculo de la derivada primera en el espacio vectorial de funciones $\{a \operatorname{sen} x + b \cos x;\ a, b \in \mathbb{R}\}$, con la base $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ tiene por filas: **A)** $(0, -1), (1, 0)$; **B)** $(0, 1), (-1, 0)$; **C)** $(-1, 0), (0, -1)$; **D)** Ninguna de ellas.

Ejercicio 4 El endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ definido por $f \circ g$, siendo $f(x, y) = (x, -y)$ y $g(x, y) = (2x - y, 0)$ para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, verifica que: **A)** Tiene dos valores propios distintos; **B)** NO es diagonalizable; **C)** La matriz asociada en la base canónica es simétrica; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 5 Si A es una matriz ortogonal cuadrada, sus posibles valores propios son: **A)** 1 y -1; **B)** 0 y 1; **C)** Todos los reales positivos; **D)** Ninguna de las anteriores.

Ejercicio 6 La forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \overline{x} \in \mathbb{R}^n$ verifica que $Q(-2\overline{x})$ es: **A)** $4Q(\overline{x})$; **B)** $-2Q(\overline{x})$; **C)** $2Q(\overline{x})$; **D)** Ninguna de las anteriores.

Problema Se pide:

a) Clasificar y resolver (si es posible), aplicando el método de Gauss, el sistema

$$\left\{\begin{array}{llll} x & +2y & +3z & = 1 \\ x & +3y & -z & = 4 \\ x & +3y & +z & = 2 \\ x & +2y & +4z & = 0 \end{array}\right. \quad (1 \text{ pto.}).$$

b) Presentar una técnica iterativa (enunciando en qué consiste) para estimar valores y vectores propios de un endomorfismo (1 pto.).

c) Calcular la matriz asociada, en las bases canónicas, a la aplicación lineal $f \colon \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ definida por $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a, a+b+c, 0)$ (1 pto.) y calcular la dimensión del subespacio $\operatorname{Im}(f)$ (0.5ptos.) y la del subespacio $\operatorname{Nuc}(f)$ (0.5ptos.).

SOLUCIONES. Álgebra (ETSI Industriales). TIPO A. Feberero [1]. 2017

Solución 1: La opción cierta es C. Se tiene que cumplir que para todo $a \in \mathbb{Z}$ se verifica $a * e = e * a = a$ es equivalente a que $ae - a - e + 2 = a \Leftrightarrow e = 2$ (nótese que la operación $*$ es conmutativa).

Solución 2: La opción cierta es C. En la opción A) el elemento neutro $(0, 0, 0)$ no está incluido. En la opción B) la suma de vectores no pertenece (como se puede comprobar). La opción C) es el subespacio generado por el vector $(2, 1, -5)$.

Solución 3: La opción cierta es A. La matriz asociada a la base $B = \{\text{sen }(x), \cos(x)\}$ es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ya que $(\text{sen }(x))' = \cos(x) = (0, 1)_B$ y $(\cos\ (x))' = -\text{sen }(x) = (-1, 0)_B$

Solución 4: La opción cierta es A. El endomorfismo es $(f \circ g)(x, y) = f(2x-y, 0) = (2x - y, 0)$, la matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ que no es simétrica. Además, los valores propios son 2 y 0. Por tanto la matriz diagonaliza.

Solución 5: La opción cierta es A. Véase ejercicio 5.20 del libro de ejercicios.

Solución 6: La solución correcta es A.
$Q(-2\overline{x}) = f(-2\overline{x}, -2\overline{x}) = (-2)(-2)f(\overline{x}, \overline{x}) = 4Q(\overline{x})$, siendo f la forma bilineal que genera Q.

Solución Problema

a) Se trata de un sistema compatible determinado. Hay que resolver el sistema mediante el método de Gauss. NO se evaluará estudiar el sistema por otro método. La solución obtenida es $x = 6$, $y = -1$, $z = -1$.

b) Véase la bibliografía básica.

c) La dimensión del núcleo y de la imagen es 2. Desde la matriz asociada en las bases canónicas, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ podemos determinar que el rango es 2 y coincide con la dimensión de la imagen. Las ecuaciones del núcleo son $AX = 0$.